DOI: 10.18427/iri-2016-0011

Az európai bankrendszer koncentrációs szintjének mérése

Tóth József
Zsigmond Király Főiskola
tothjo@otpbank.hu

A bankpiac koncentrációjának mérésére nemcsak a verseny erejének meghatározása miatt, hanem a banki tevékenység kockázati szintjére ható folyamatok értékelése miatt is szükség van. A koncentráció szintjének ábrázolása a Lorenz-görbével lehetséges, a koncentráció mértéke pedig többek között a széles körben használt Gini-indexszel, az úgynevezett CR mutatókkal, illetve a Herfindahl-Hirschman indexszel határozható meg. Ez utóbbi mutató szintjére vonatkozóan becslés adható részleges adatfelvétel segítségével. Általában fogalmazva, amennyiben egy sokaság értékösszege és a sokaságot alkotó egyedek száma ismert, akkor a vizsgált ismérvérték koncentrációját mutató Herfindahl-Hirschman indexre megadható egy olyan – a mintavételtől függő – minimális érték, amelytől a teljes sokaság Herfindahl-Hirschman indexének értéke nagyobb. Megadható továbbá egy olyan – a mintavételtől függő – maximális érték is, amelytől a teljes piac Herfindahl-Hirschman indexének értéke biztosan kisebb. Mivel az Európai Központi Bank Statisztikai Adattárházában az uniós szintű aggregát sokasági összegek (például aggregát mérlegfőösszeg, vagy aggregát sajáttőke összege), illetve piaci szereplők száma hozzáférhető, az Európai Unió bankpiacára megadhatóak a fent említett minimális és maximális Herfindahl-Hirschman index értékek. Az Adattárház tagországi szintű adatokat is tartalmaz, így a kidolgozott módszer egy adott tagország bankpiaci koncentrációs szintjének meghatározására is használható. Ennek azért van jelentősége, mert a teljes bankpiac koncentrációs szintje viszonylag kisszámú minta esetén is jól becsülhető.

Bevezetés

A piaci koncentráció erejének meghatározására többen, többféle módszert dolgoztak ki. A méretstruktúra mérésére elsősorban a legnagyobb három (CR_3) vagy legnagyobb öt bank (CR_5) piaci részarányát mérő koncentrációs mutatókat, valamint az összes szereplő piaci részarányát mérő Herfindahl-Hirschman indexet használják (Várhegyi, 2003). Ezen kívül ismert még a Gini index, Hannah-Kay index, a Hall-Tidemann index és Theil entrópia indexe (Calabrese & Rosso, 2012), míg a nem-strukturális mutatók közül a legelterjedtebb a Panzar-Rosse teszt (Várhegyi, 2003). Egy más csoportosítás szerint abszolút és relatív mérőszámai vannak a koncentrációnak (Latreille & Mckley, 2011).

A legelterjedtebb mutatók a Gini index, a CR indexek és a Herfindahl-Hirschman index, ezért a következő részletesebb bemutatás csak ezekre a mutatókra korlátozódik.

A szakirodalom egyik legvitatottabb mutatója a Gini-index (KOVÁCS, 2011), amely Corrado Gini nevéhez fűződik (GINI, 1921). A Gini-index (amelynek jele G) meghatározásához először a Lorenz görbét kell értelmezni (LORENZ, 1905), amely

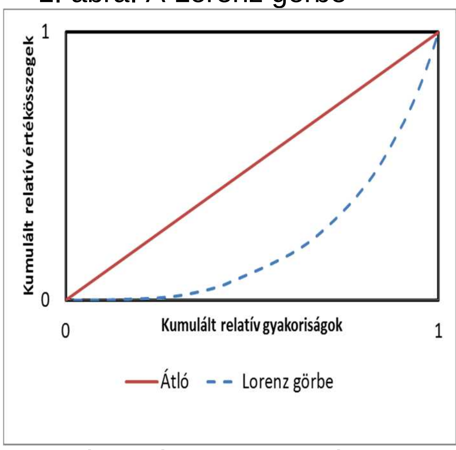
Max Otto Lorenz amerikai közgazdász nevéhez fűződik (Tóth, 2014). A Lorenz-görbe egy egységnyi oldalú négyzetben elhelyezett vonaldiagram, amely a kumulált relatív gyakoriságok függvényében ábrázolja a kumulált relatív értékösszegeket (Korpás, 1996). Érdekességnek számít, hogy Lorenz gyakorlatilag a doktori disszertációját publikálta a sokaság koncentrációjáról, később semmilyen más tudományos közleménye sem volt, mégis ez az egy cikk tette híressé a nevét (Kleiber, 2007).

A koordináta rendszer (0;0) és (1;1) pontját összekötő szakasz gyakorlatilag egy egység oldalhosszúságú négyzet átlója. A sokaság kumulált relatív értékösszegek kumulált relatív gyakoriságokhoz történő hozzárendelésével kapjuk a Lorenz görbét (Fleming & Nellis, 2000), amelynek az egységnyi oldalhosszúságú négyzet átlójától vett távolsága mutatja a koncentráció fokát. Minél nagyobb a távolság, annál nagyobb a koncentráció. Gini tulajdonképpen ezt a távolságot, pontosabban az átló és a görbe által határolt terület nagyságát számszerűsítette. Meg kell azonban jegyezni, hogy a Lorenz görbe nem folytonos, hanem csak a kumulált relatív gyakoriságok pontjaiban értelmezett.

Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet átlója két egybevágó háromszögre osztja a négyzetet, amelyek területei külön-külön 0,5 nagyságúak. A Lorenz görbe alatti terület kiszámításával és 0,5-ből való kivonással meghatározható az, hogy az átló és a görbe által bezárt terület mekkora része háromszög területének. Amennyiben nincs koncentráció, azaz a sokaság elemei egyenlő nagyságúak, a Lorenz görbe pontosan az átlóra esik. Ekkor a Gini-index értéke 0. Amennyiben csak egyetlen eleme van a sokaságnak, akkor a legnagyobb a koncentráció, ekkor a Gini-index értéke 1.

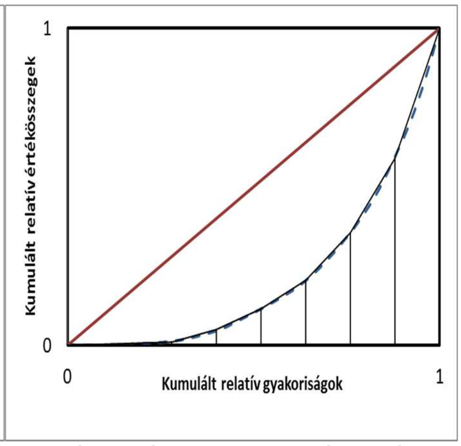
A következő két ábra egyrészt a Lorenz görbe értelmezését mutatja, másrészt a görbe alatti terület meghatározásának módját szemlélteti.

1. ábra. A Lorenz görbe



Forrás: fiktív adatok alapján szerkesztés

2. ábra: Gini-index számítása



Forrás: fiktív adatok alapján saját szerkesztés

A görbe alatti terület trapézokra osztható, amelyek magassága és két párhuzamos oldalának hossza, így azok területe meghatározható.

A trapézok területének összege az elemek számának növelésével felülről tart a görbe alatti területhez. Ebből az következik, hogy ezzel a módszerrel a négyzet átlója és a Lorenz görbe által bezárt terület nagysága alulról közelített.

A Gini index algebrai úton a következő formula alapján számítható:

$$G = \frac{1}{2\bar{x}n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right|$$

ahol

$\bar{x}$ a sokaság elemeinek átlaga,
n a sokaság elemeinek száma,
x_i, x_j a sokaság elemei,
i$\leq n$, j$\leq n$, i$\epsilon\mathbb{Z}^+$, $j\epsilon\mathbb{Z}^+$.

G értéke 0-tól nagyobb és 1-től kisebb vagy egyenlő. Minél nagyobb a G értéke, annál nagyobb koncentrációra utal.

A Herfindahl-Hirschman index az egyik legelterjedtebb piaci koncentrációt mutató mérőszám. Az n szereplős piacon, ahol a vizsgálat tárgyát képező koncentrációs tényezők 0<x_1,x_2,…,x_i, és $G = \sum_{i=1}^{n} x_i$, ahol $i \in Z^+, n \in Z^+$, akkor

$$HHI = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{G}\right)^2$$

A mutató számításakor általában százalékos értékekkel kalkulálnak, azonban a HHI értékét csak a százaléklábak négyzetének összegeként fejezik ki. Amennyiben a HHI értéke 1000 alatt marad, akkor alacsony a piac koncentráltsága, 1000 és 1800 között közepes, míg 1800 felett nagyfokú a koncentráltság (EKB 2015).

Megjegyzésre érdemes, hogy az Egyesült Államok Igazságügy Minisztériumának Szövetségi Kereskedelmi Bizottsága ugyanezeket az értékeket használja a piac koncentrációjának mérésére a fúziók engedélyezésekor. Korábban, 1968-tól kezdődően az úgynevezett négy vállalkozás koncentrációs hányadosával (CR_4) határozták meg a koncentráció erejét, majd 2010-ben tértek a Herfindahl-Hirschman index számítására (Federal Trade Commission). A CR_4 hányados értéke által meghatározott piaci koncentrációt a Szövetségi Kereskedelmi Bizottság a következőképpen értelmezte:

1. táblázat. A CR_4 index használata a koncentráció meghatározásában

Koncentrációs osztály alsó értéke	Koncentrációs osztály felső értéke	Minősítés
0-tól nagyobb	kisebb, vagy egyenlő, mint 0,25	alacsony koncentráció
0,25-tól nagyobb	kisebb, vagy egyenlő, mint 0,50	közepes koncentráció
0,50-tól nagyobb	kisebb, vagy egyenlő, mint 1	magas koncentráció

Forrás: Brezina, Pekár és Cickova (2012) adatai alapján, saját szerkesztés

A koncentráció mérésének másik legelterjedtebb módja az úgynevezett k bank koncentrációs hányados, ahol az első k legnagyobb bank piaci részesedését vizsgálják és az összes többit figyelmen kívül hagyják (BIKKER, 2004). A CR_3 mutató olyan viszonyszám, amely értéke egyenlő a három legnagyobb piaci szereplő aggregát értékösszegének és az *n* szereplős teljes piac aggregát értékösszegének hányadosával, azaz

$$CR_3 = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot 100\%,$$

ahol $i \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ és x_i a sokaság elemei. Mivel a szereplő nélküli piac nem értelmezhető, ezért $0\,\% < CR_3 \leq 100\%$. Minél nagyobb a mutató értéke, annál nagyobb piaci koncentrációra utal.

Herfindahl-Hirchman index becslésére kidolgozott eddigi módszerek

Az index becslésénél *Nauenberg, Basu és Chand* (1997) abból indult ki, hogy a legnagyobb piaci szereplők piaci részesedése ismert, míg a többieké nem. A nem ismert piaci szereplők pozitív egész értékű, százalékos formában adott piaci részesedésének különböző lehetséges eloszlását vizsgálták. A problémát arra a klasszikus kombinatorikai feladatra vezették vissza, ahol m darab golyót q darab kalapban kell úgy elhelyezni, hogy minden golyó bekerüljön egy kalapba és egyetlen kalap se maradjon üresen. Itt az m a pozitív egész értékkel adott, q piaci szereplő piaci részesedését jelenti. A szerzők által hozott példa szerint, ha a piac n szereplős és ebből $q = 3$ a legkisebb piaci részesedéssel rendelkező vállalkozás (X_{n-2}, X_{n-1}, X_n) összesített piaci részesedése $m = 8\,(\%)$, azaz 8 százalék piaci részesedést kell szétosztani 3 piaci szereplő között, akkor a piaci részesedés a következő bekövetkezési valószínűséggel és módon alakulhat:

2. táblázat. Példa Neuenberg et al. Herfindahl-Hirschman index becslésére

Sorszám	Lehetséges eloszlások			Összesen	HHI értéke	Bekövetkezés valószínűsége	Várható érték
	X_{n-2}	X_{n-1}	X_n	m			
1	1	1	6	8			
2	1	6	1	8			
3	6	1	1	8	38	3/21=0,14	5,43
4	1	2	5	8			
5	1	5	2	8			
6	2	1	5	8			
7	2	5	1	8			
8	5	1	2	8			
9	5	2	1	8	30	6/21=0,29	8,57
10	1	3	4	8			
11	1	4	3	8			
12	3	1	4	8			
13	3	4	1	8			
14	4	1	3	8			
15	4	3	1	8	26	6/21=0,29	7,43
16	2	2	4	8			
17	2	4	2	8			
18	4	2	2	8	24	3/21=0,14	3,43
19	2	3	3	8			
20	3	2	3	8			
21	3	3	2	8	22	3/21=0,14	3,14
Összesen							28

Forrás: Neuenberg et al. (1997) adatai alapján saját szerkesztés

A fenti példában a nem ismert piaci részesedések várható Herfindahl-Hirschman indexe 28, így a teljes sokasági index az első $n-3$ elem piaci részesedésének négyzetösszege növelve 28-al.

A becslés gyengeségeként hozható fel, hogy az egész modell csak egész számokon értelmezett, a hétköznapi életben annak valószínűsége azonban elég kicsi, hogy a nem ismert piaci részesedések úgy oszlanak el, hogy azok egész értéket adjanak. A modell másik gyengesége az alapfeltevésében rejlik, hiszen abból indul ki, hogy a legnagyobb piaci szereplők piaci részesedése ismert, míg a többieké nem. Ez azonban nagyon sok esetben nem valósítható meg.

Naldi és Flamini (2014) intervallumbecslést adott a Herfinahl-Hirschman indexre. Számításuk során szintén abból indultak ki, hogy az összes piaci résztvevő piaci részesedése nem ismert teljes egészében, azonban az első M legnagyobb részesedése igen. Amennyiben n szereplős piacon s_i jelöli az i-edik piaci résztvevő piaci részarányát, továbbá ismert az első M legnagyobb részaránnyal rendelkező piaci szereplő piaci részesedése, akkor $HHI = \sum_{i=1}^{n} s_i^2$, ahol $1 = \sum_{i=1}^{n} s_i$. NALDI és FLAMINI a HHI minimális értékét a következő formula szerint adta meg:

$$HHI_{min} = \sum_{i=1}^{M} s_i^2 + \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{M} s_i\right)^2}{n - M}$$

A Herfindahl-Hirschman index maximális értékének meghatározásakor két esetet elemeztek a szerzők. Amennyiben a nem ismert részesedések összege kisebb, vagy egyenlő, mint a legkisebb ismert részesedés, akkor a maximális érték

$$HHI_{max} = \sum_{i=1}^{M} s_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^{M} s_i\right)^2$$

Amennyiben a nem ismert részesedések összege nagyobb, mint a legkisebb ismert részesedés, akkor

$$HHI_{max} = \sum_{i=1}^{M} s_i^2 + s_M^2 Q\left(1 - \sum_{i=1}^{M} s_i - s_M Q\right)^2, \text{ ahol } Q = \frac{1-\sum_{i=1}^{M} s_i}{s_M}.$$

Michelinia és Pickforda (1985) koncentrációs hányados felhasználásával adott alsó és felső becslést a Herfindahl-Hirschman indexre a vállalkozások bevételének megoszlása alapján.

Kanagala és munkatársai (2004) új becslési eljárásának eredményeként az alacsony koncentrációjú piacnak minősítette azokat, amelyekre $HHI < 20^2 + \frac{80^2}{n-1}$, ahol n a piaci szereplők száma, míg a 2000-es HHI értéket meghaladó piacokat magas koncentrációjúaknak értékelte.

A Herfindahl-Hirechman index becslésének új módszere

A módszer alkalmazásának előfeltétele, hogy legyen ismert a sokaság aggregát értékösszege, a sokaság egyedeinek száma és álljon rendelkezésre egy, a sokaságból vett minta eredménye. Az állítások megfogalmazásában általában csak sokaság egy mennyiségi ismérvére történik hivatkozás, ez lehet bármely mérleg, vagy eredménykimutatás adat. A Herfindahl-Hirschman index számítása például a mérlegfőösszegek által alkotott sokaság esetén a következőképpen fogalmazható meg:

Jelölje az n szereplős bankpiacot alkotó hitelintézetek mérlegfőösszegének sokaságát A, egyedeit x_i, ahol $x_i \in A$, $i \leq n$, legyen a piac aggregát mérlegfőösszege

$G = \sum_{i=1}^{n} x_i$, ahol $0 < x_i$ bármely $i, n \epsilon \mathbb{Z}^+$-ra. Ekkor az A egyedeinek Herfindahl-Hirschman indexe

$$HHI = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{G}\right)^2$$

A megfogalmazás nemcsak mérlegfőösszegek koncentrációjára vonatkozik, hanem általánosan is megadható.

T1 tétel: Ha egy $n \in \mathbb{Z}^+$ elemű sokaság egyedeinek mennyiségi ismérvértékeit $0 < x_i$ jelöli, ahol $i \leq n$ és $i \in \mathbb{Z}^+$ és a sokaságból vett minta $n - k$ elemű, ahol $1 < k \leq n$, $k \in \mathbb{Z}^+$, akkor a nem ismert k számú egyedet külön-külön azok átlagával helyettesítve, az így kapott n elemű sokaság Herfindahl-Hirschman indexe kisebb, mint az eredeti n elemű sokaság Herfindahl-Hirschman indexe, amennyiben a nem ismert elemek közül legalább egynek az értéke eltér egy másik nem ismert egyed értékétől.

Az állítás legutolsó része azért szükséges, mert amennyiben a nem ismert elemek egyenlők, akkor az átlaguk megegyezne az értékükkel és akkor az eredeti és a módosított sokaság indexe egyenlő lenne.

Amennyiben az állítás igaz, a HHI minimális szintje mintavétel segítségével megadható, ha ismert az aggregát sokasági összeg és a sokaság egyedeinek száma. Ez azt jelenti, hogy amennyiben ismert az aggregát sokasági összeg (például az uniós szinten aggregát konszolidált mérlegfőösszegek értéke), valamint a sokaság egyedeinek száma (a példánál maradva a bankok száma), akkor mintavétellel (a kimaradó bankok mérlegfőösszeg átlagának meghatározásával és a mintában nem szereplő bankok mérlegfőösszegének az így kapott átlaggal történő helyettesítésével) megadható egy olyan érték, amelytől a teljes sokaság HHI értéke nagyobb.

Legyen például A a következő számok sokasága A= {5;10;20;25;40;50;60;80;100}. Az A kilencelemű, amelynek értékösszege 390. A sokaság HHI értéke pedig:

$$HHI = \left(\frac{5}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{10}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{20}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{25}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{40}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{50}{390} \cdot 100\right)^2 + + \left(\frac{60}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{80}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{100}{390} \cdot 100\right)^2 = 1660{,}09.$$

Egy négyelemű mintát választva öt egyed kimarad a teljes sokaságból. Legyen a minta például {25;50;80;100}, és maradjon ki a mintából {5;10;20;40;60}. A módszer lényege az, hogy ez utóbbi értékeket az átlaguk helyettesíti a HHI számítása során. A problémát az jelenti, hogy ezek a számok nincsenek a mintában, ezért nem ismertek. Ismert viszont az átlaguk, hiszen az eredeti feltétel az volt, hogy ismert legyen a sokasági átlag és a sokaság egyedeinek száma. Mivel a sokaság értékösszege 390 és egyedeinek száma 9, továbbá a mintában 4 egyed szerepel, amelyek értékösszege 25+50+80+100=255, így a kimaradó egyedek átlaga meghatározható: $\frac{390-255}{5} = 27$. Az így kapott sokaság egyedei a mintában szereplő egyedek, valamint a mintában nem szereplő egyedek számtani átlagai lesznek. Ezek HHI értéke a következő (a nem ismert értékeket azok átlaga helyettesíti a számításban):

$$\overline{HHI} = \left(\frac{27}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{27}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{27}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{25}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{27}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{50}{390} \cdot 100\right)^2 + + \left(\frac{27}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{80}{390} \cdot 100\right)^2 + \left(\frac{100}{390} \cdot 100\right)^2 = 1523{,}34.$$

A módszer lényege, hogy egy négyelemű mintavétel segítségével a HHI minimális értéke meghatározható lett, a HHI értéke 1523,34-tól nagyobb.

A fenti példában a szokásosan alkalmazott százaléklábak négyzeteként kalkulált HHI értékek kerültek meghatározásra (a hányadosok 100-zal voltak megszorozva), a bizonyítás során az egyszerűsítés kedvéért azonban nem a százaléklábak négyzeteként adott kifejezések szerepelnek.

B1 bizonyítás: A tételben megadott jelölések mellett legyen a sokaság egyedeinek összege $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Legyen továbbá a nem ismert k egyed értékeinek összege $G = \sum_{i=1}^{k} x_i$, tehát ezek számtani átlaga $\frac{G}{k}$. Jelölje $\overline{HHI}$ annak a sokaságnak a Herfindahl-Hirschman indexét, amely egyedei a mintavételből ismert $n-k$ egyed értékei és a nem ismert egyedek k db átlaga. A Herfindahl-Hirschman index értékét nem befolyásolja a sokaság egyedeinek sorrendje, ezért legyenek a nem ismert egyedek az így meghatározott sokaság első egyedeiként jelölve ($x_1, x_2, x_{3,\dots,} x_k$), míg a sokaság többi, mintavételből ismert egyede legyen $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3,\dots,} x_n$-el jelölve.

Az állítás szerint $\overline{HHI} \leq HHI$.

A $\left(\frac{1}{k} - \frac{x_1}{G}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{x_2}{G}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{x_3}{G}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{x_k}{G}\right)^2$ kifejezése nem negatív, mivel minden tagja négyzetre emelt, és a nulla értéket is csak abban az esetben veheti fel, ha $\frac{1}{k} = \frac{x_1}{G} = \frac{x_2}{G} == \frac{x_3}{G} = \cdots = \frac{x_k}{G}$, ami viszont nem lehetséges, hiszen a tétel szerint legalább egy nem ismert egyed értéke eltér egy másik nem ismert egyed értékétől. Így felírható a $0 < \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{x_i}{G}\right)^2$ összefüggés. A zárójelet felbontva a következő egyenéőtlenség adódik: $0 < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k^2} - \frac{2 \cdot x_i}{k \cdot G} + \left(\frac{x_i}{G}\right)^2$. Ez átrendezése után

$0 < \frac{1}{k} - \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{G} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{G}\right)^2$. Mivel $\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{G} = 1$, ezért $0 < \frac{1}{k} - \frac{2}{k} \cdot 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{G}\right)^2$.

Mivel $\frac{1}{k} - \frac{2}{k} = -\frac{1}{k}$, ezért $\frac{1}{k} < \frac{\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2}{G^2}$. A kifejezést átalakítva $k \cdot \left(\frac{G}{k}\right)^2 < \sum_{i=1}^{k} {x_i}^2$ adódik. Az így kapott egyenlőtlenség mindkét oldalát $\left(\frac{1}{T}\right)^2$-el szorozva, és a kifejezést átrendezve a $k \cdot \left(\frac{\frac{G}{k}}{T}\right)^2 < \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2$ kifejezés adódik. Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezésből a $\frac{G}{k}$ éppen az első k egyed értékeinek átlaga. Az egyenlőtlenség mindkét oldalához $\sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2$ kifejezést adva

$k \cdot \left(\frac{\frac{G}{k}}{T}\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2 < \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2$.

Ebből pedig $k \cdot \left(\frac{\frac{G}{k}}{T}\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2 < \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2$, ami pontosan az állításban megfogalmazott összefüggés.

A fenti állítás szerint az Unióban székhellyel rendelkező bankok valamilyen szempont szerint (mérleg, vagy eredménykimutatás adat) számított minimális HHI értéke meghatározható, hiszen a mintában nem szereplő bankok adatai helyett azok átlagát szerepeltetve a HHI értéke csökken. Például két egyedet azok számtani átlagára cserélve a koncentrációt mutató érték csökken.

A mintából kimaradók tagországonként számított átlaga tagországonként más és más. A T1 tétel azonban lehetőséget teremt arra is, hogy tagországonként legyen számítható a kimaradók átlaga, hiszen tetszőleges számú *k* egyed esetén – ahol 1 <

$k \leq n$ – az egyedek értékét azok átlagára cserélve a HHI értéke csökken, azaz tagországonként meghatározható a mintából kimaradó, de a tagországhoz tartozó bankok vizsgálat tárgyát képező adatának átlaga. Ezeket a tagországonként eltérő átlagokat használva a mintában nem szereplő bankok vizsgálat tárgyát képező adata helyett a HHI értéke kisebb lesz attól a HHI értéktől, amely a teljes adatfelvétel alapján rendelkezésre álló adatok alapján lenne számítva.

T2 tétel: Ha egy $n \in \mathbb{Z}^+$ elemű sokaság egyedeinek mennyiségi ismérvértékeit $0 < x_i$ jelöli, ahol $i \leq n$ és $i \in \mathbb{Z}^+$ és a sokaságból vett minta $n-k$ elemű, ahol $1 < k \leq n$, $k \in \mathbb{Z}^+$ továbbá $G = \sum_{i=1}^{k} x_i$, akkor a nem ismert k számú egyedet elhagyva a sokaságból, valamint G-vel kiegészítve azt, az így kapott $n-k+1$ elemű sokaság Herfindahl-Hirschman indexe nagyobb, mint az eredeti, n elemű sokaság Herfindahl-Hirschman indexe.

A fenti példánál maradva A= {5;10;20;25;40;50;60;80;100}. Az A kilencelemű, amelynek értékösszege 390, HHI értéke 1660,09

Legyen a kiválasztott minta most is {25;50;80;100} számok halmaza. A módszer lényege az, hogy a mintában nem szereplő értékek összegével kiegészítve ezeket a számokat a kilencelemű teljes sokaság Herfindahl-Hirschman indexe kisebb az így kapott ötelemű sokaság Herfindahl-Hirschman indexétől. Mivel a sokaság értékösszege 390 és a mintában 4 egyed szerepel, amelyek értékösszege 25+50+80+100=255, így a kimaradó egyedek értékének összege $390-255=135$. Az állítás szerint az A sokaság HHI-ja kisebb, mint a {25;50;80;100;135} számok által alkotott sokaság HHI-ja. Ezek HHI értéke a következő:

$$\overline{HHI} = \left(\frac{25}{390}\cdot 100\right)^2 + \left(\frac{50}{390}\cdot 100\right)^2 + \left(\frac{80}{390}\cdot 100\right)^2 + \left(\frac{100}{390}\cdot 100\right)^2 + \left(\frac{135}{390}\cdot 100\right)^2 = 2481{,}92.$$

A módszer lényege, hogy egy négyelemű mintavétel segítségével a HHI maximális értéke meghatározható lett, a HHI értéke 2481,92-től kisebb.

B2 bizonyítás: A tételben megadott jelölések mellett legyen a sokaság egyedeinek összege $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$. A Herfindahl-Hirschman index értékét nem befolyásolja a sokaság egyedeinek sorrendje, így legyen a nem ismert egyedeket tartalmazó részsokaság a sokaság első k egyede, míg a sokaság ismert egyedei legyenek $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3,\ldots,} x_n$.

Jelölje $\overline{HHI}$ annak a módosított sokaságnak a Herfindahl-Hirschman indexét, amely egyedeinek értéke $G, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3,\ldots,} x_n$ és legyen HHI az eredeti sokaság Herfindahl-Hirschman indexe.

Mivel az eredeti sokaság egyedeinek értéke minden esetben nagyobb nullától, ezért a $0 < 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 \ldots + x_2x_n + \cdots + x_{k-1}x_k)$ állítás igaz. Az egyenlőtlenség jobb oldalához a $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=1}^{k} x_i^2$ kifejezést (nullát) adva a jobb oldal értéke nem változik. Így $0 < \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k)$, amelyből átalakítással a $0 < (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k)(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2$ adódik. Ebből pedig az következik, hogy $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 < G^2$. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\left(\frac{1}{T}\right)^2$-el szorozva $\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2 < \left(\frac{G}{T}\right)^2$. Az egyenlőtlenség mindkét oldalához $\sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2$-t adva $\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2 < \left(\frac{G}{T}\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{T}\right)^2$. Így $HHI < \overline{HHI}$. Ez pedig pontosan az állításban megfogalmazott összefüggés.

A fenti tételek érvényesek a bankok által közzétett bármely típusú, pénzügyi beszámolókban közzétett adatsor koncentrációjának mérésekor. Mivel az Európai Központi Bank Statisztikai Adattárházában az uniós szintű aggregát sokasági összegek (például aggregát mérlegfőösszeg, vagy aggregát sajáttőke összege), illetve piaci szereplők száma hozzáférhető, az Európai Unió bankpiacára megadhatóak a fent említett minimális és maximális Herfindahl-Hirschman index értékek.

Irodalomjegyzék

Bikker, J. (2004). *Competition and Efficiency in a Unified European Banking Market*. Cheltenham: Edward Elgar Publishing Limited.

Calabrese, R., & Porro, F. (2012). *Single-name concentration risk in credit portfolios: a comparison of concentration indice*s. UCD Geary Institute, WP2012/14.

European Central Bank (2015). *Report on financial structures*. Európai Központi Bank.

Federal Trade Commission (2015). *Horizontal Merger Guidelines*. The United States Department of Justice.

Fleming, J., & Nellis, G (2000). *Principles of Applied Statistics*. Thomson Learning, 2nd edition, p. 27.

Gini, C. (1921). Measurement of Inequality of Incomes. *Econimic Journal*, 31, 124-126.

Kanagala, A., et al. (2004). A probabilistic approach of hirschman-herfindahl index (hhi) to determine possibility of market power acquisition. In *Power Systems Conference and Exposition*, vol 3 (pp. 1277-1282).

Kleiber, K. (2007). *The Lorenz curve in economics and econometrics*. Basel: University of Basel Center of Business and Economics (WWZ).

Korpás A. (szerk.) (1996). *Általános statisztika I-II*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Kovács I. (2011). A jövedelemeloszlás és jövedelemegyenlőtlenség a személyijövedelemadó-bevallási adatok tükrében. *Statisztikai Szemle*, 89 (3), 294-312.

Latreille, P., & Mackley, J. (2011). Using Excel to Illustrate Hannah and Kay’s Concentration Axioms. *International Review of Economics Education*, 10 (1), 117-127.

Lorenz, M. O. (1905). Methods of measuring the concentration of wealth. *American Statistical Association*, 9, (70), 209-219.

Michelinia, C., & Pickford, M. (1985). Estimating the Herfindahl Index from Concentration Ratio Data. *Journal of the American Statistical Association*, 80 (390), 301-305.

Naldi, M., & Flamini, M. (2014). Interval Estimation of the Herfindahl-Hirschman Index Under Incomplete Market Information. *IEEE Computer Society*, 318-323.

Nauenberg, E., Basu, K., & Chand, H. (1997). Hirschman-Herfindahl index determination under incomplete information. *Applied Economics Letters*, 4 (10), 639-642.

Tóth O. (2014). A magyar és egyes uniós tagországok mezőgazdaságának összehasonlító elemzése. *Acta Carolus Robertus*, 4 (2).

Várhegyi É. (2003). Bankverseny Magyarországon. *Közgazdasági Szemle*, 50 (12), 1027-1048.