Gondolatok a Blokus játékról

Bagota Mónika

Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematika Tanszék, Budapest

bagota.monika@tok.elte.hu

A Blokus játék tartalma: 1db 400 mezős játéktábla; 84 db alakzat 4 színben. A játékosok célja, minél több alakzatot elhelyezni a játéktáblán. A saját színű alakzatok csak sarkaikkal érintkezhetnek, oldalaikkal nem. A játékos taktikusan lehelyezett alakzataival blokkolhatja játékostársait, és saját területét is bővítheti. Minden alakzat más formájú, ezért minden lehelyezés megváltoztathatja a játék kimenetelét. A játék során láthatjuk, hogy a különböző alakzatok egyforma négyzetlapokból épülnek fel. Minden színből 21 db alakzat található a játékban. Felmerül a kérdés, hogy a játék készítői elkészítették-e az összes lehetséges alakzatot (forgatástól vagy tükrözéstől eltekintve, mivel az alakzatok átlátszóak), amelyek 1, 2, 3, 4 és 5 négyzetlapból készíthetők oly módon, hogy a lapokat csak teljes oldalukkal szabad összeilleszteni. Valóban, egy négyzetlapból nyilván egy, két négyzetlapból is egy alakzat készíthető, három négyzetlapból már 2 triominó, négy négyzetlapból 5 tetrominó, öt négyzetlapból pedig 12 pentominó készíthető. Számos kérdés felmerül bennünk: Az általunk elkészített alakzatok szerepelnek-e a játékban? Elhelyezhető-e a táblán az összes alakzat? Elhelyezhető-e a táblán az összes alakzat a szabályoknak megfelelően?

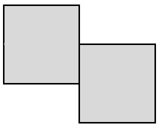
A játékosok célja: saját 21 alakzatuk közül minél többet elhelyezni a játéktáblán. Első lépésként minden játékosnak egy sarokmezőre kell helyeznie egy alakzatot. Az újabb alakzatokat úgy kell elhelyezni, hogy a saját színű alakzatok csak sarkaikkal érintkezhetnek, oldalaikkal nem. A különböző színű alakzatok érintkezésére nincs semmilyen feltétel. A játéknak akkor van vége, ha egyik játékos sem tud több alakzatot tenni a játéktáblára. A játékot az nyeri, akinek a megmaradt alakzatain található négyzetek száma a lehető legkevesebb.

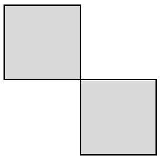
Vizsgáljuk meg a játékban található alakzatokat!

Felmerül a kérdés, hogy a játék készítői elkészítették-e az összes lehetséges alakzatot (forgatástól vagy tükrözéstől eltekintve, mivel az alakzatok átlátszóak), amelyek 1, 2, 3, 4 és 5 egyforma négyzetlapból készíthetők oly módon, hogy a lapokat csak teljes oldalukkal szabad összeilleszteni.

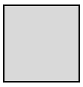
Ez a helyes összeillesztés.

Az alábbi illesztések helytelenek.



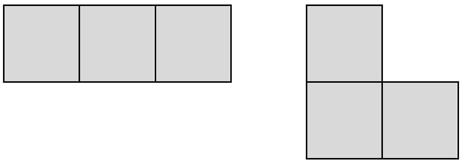


- Egy négyzetlapból – nyilván – csak egyféle alakzat hozható létre.

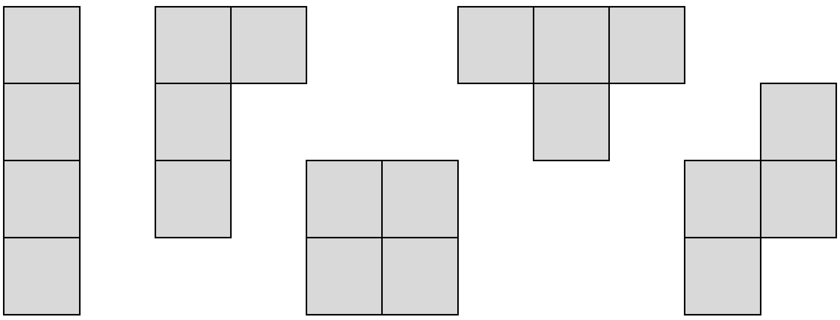


- Két négyzetlapból – a megadott illesztési feltétel szerint – csak egyféle alakzat rakható ki, melynek neve: dominó.

- Három négyzetlapból – a megadott illesztési feltétel szerint – kétféle alakzat rakható ki, melynek neve: triominó.

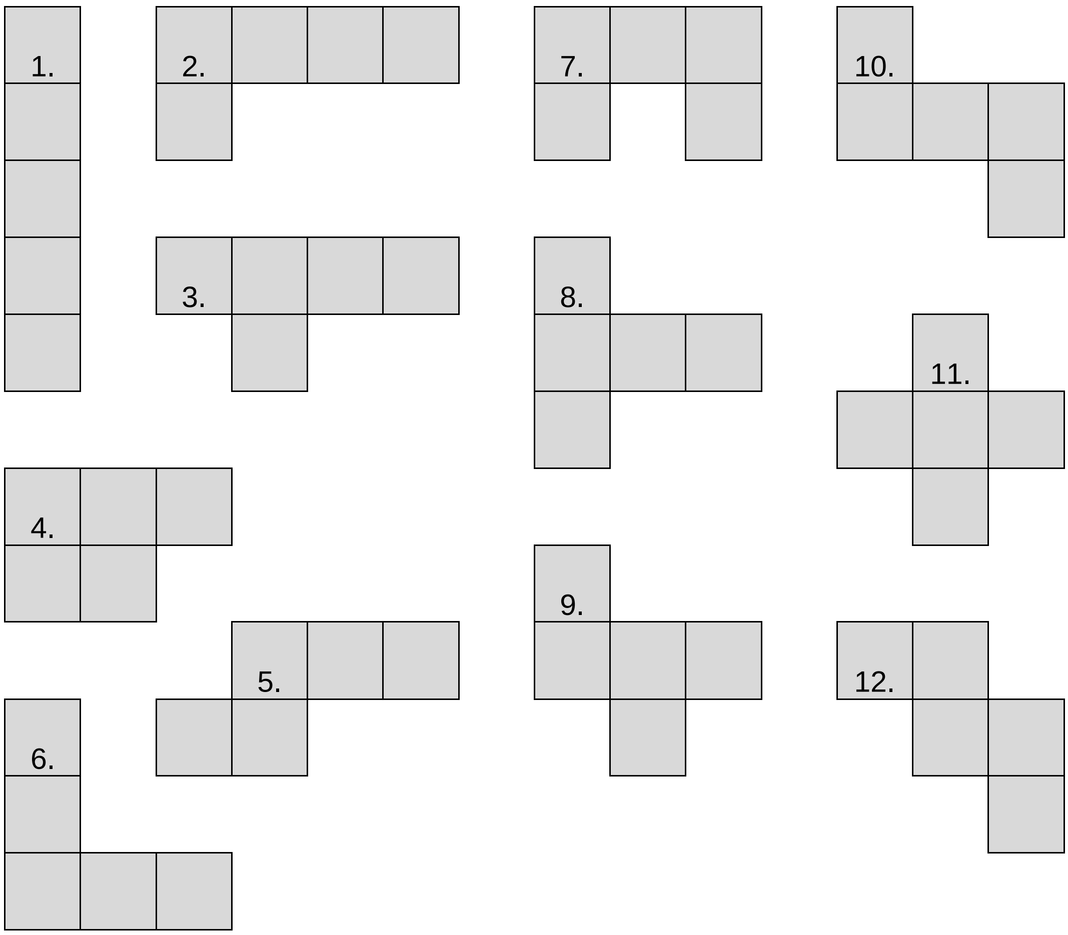


- Négy négyzetlapból – a megadott illesztési feltétel szerint – ötféle alakzat rakható ki, melynek neve: tetrominó.



- Öt négyzetlapból – a megadott illesztési feltétel szerint – már 12 alakzat áll elő, melynek neve: pentominó.

Az összes alakzat elkészítéséhez célszerű próbálkozásainkat rendszerbe foglalni. (Továbbra is csak azokat az alakzatokat tekintsük különbözőnek, amelyek forgatással vagy tükrözéssel nem vihetők egymásba.) Először az 5 négyzetlapot tegyük egy sorba: 1. alakzat. Utána pontosan 4 négyzetlapot tegyünk egy sorba, az 5. négyzetlapot pedig helyezzük el az összes lehetséges módon. Így két különböző alakzatot kapunk: 2. és 3. alakzat. Illesszünk most egy sorba 3 négyzetlapot, majd a fennmaradó két négyzetlapot szintén egy sorba illesztve „ragasszuk össze” a két alakzatot a lehetséges módokon. Így kapjuk meg a 4., 5., 6. és 8. alakzatokat. Illesszünk újra egy sorba 3 négyzetlapot, majd a fennmaradó két négyzetlapot mozgassuk külön-külön. A 7. alakzatnál a két négyzetlap ugyanazon az oldalon helyezkedik el, a 9., 10. és 11. alakzatok esetében pedig a két négyzetlap szemközti oldalon helyezkedik el. (A 8. alakzatot tekinthetjük úgy is, hogy ezen a módon áll elő.) Az utolsó pentominónál csak 2 lap került egy sorba: 12. alakzat.

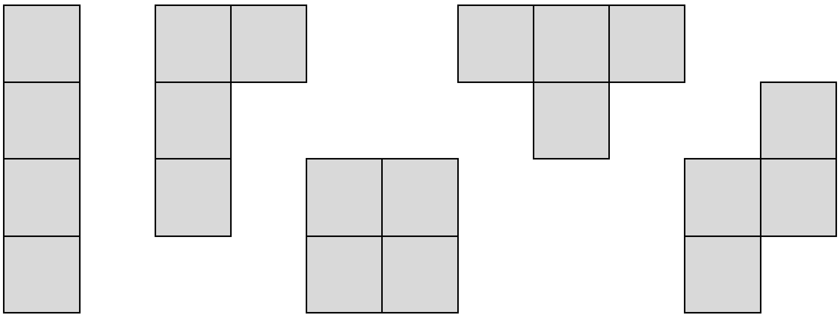


Kaptuk tehát, hogy a játék készítői elkészítették az összes lehetséges alakzatot, amelyek 1, 2, 3, 4 és 5 négyzetlapból készíthetők oly módon, hogy a lapokat csak teljes oldalukkal szabad összeilleszteni.

Egy készletet alkotó négyzetlapok területének összege: $1+2+2\cdot3+5\cdot4+12\cdot5=89$ területegység. Így a játékhoz tartozó készletek területének összege: $4\cdot89=356$. Ebből adódik, hogy elméletben lerakható az összes alakzat a játéktáblára, mivel a tábla 400 négyzetlapból áll. Azonban nagyon nehéz feladat annak az igazolása, hogy ez a lerakás ténylegesen megvalósítható-e. (Lásd a tetrominók lerakását.).

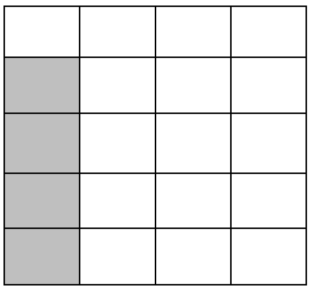
Mielőtt továbbmennénk, érdemes elgondolkodni azon, hogy 6 négyzetlapból hány alakzat készíthető az előzőekhez hasonlóan oly módon, hogy a lapokat csak teljes oldalukkal szabad összeilleszteni. Belátható (például a pentominónál bemutatott módon), hogy hat négyzetlapból már 35 különböző alakzat rakható ki. Az elkészült alakzatok közül foglalkozzunk külön a tetrominókkal és a pentominókkal.

- Tevékenységek tetrominókkal.

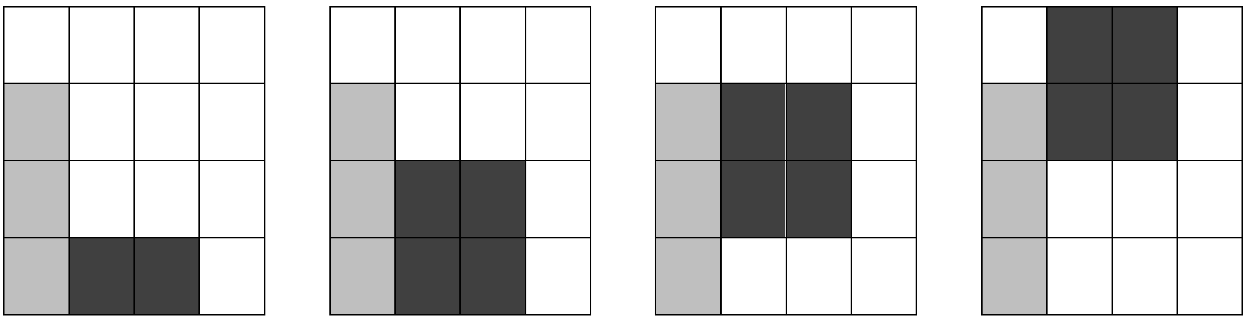


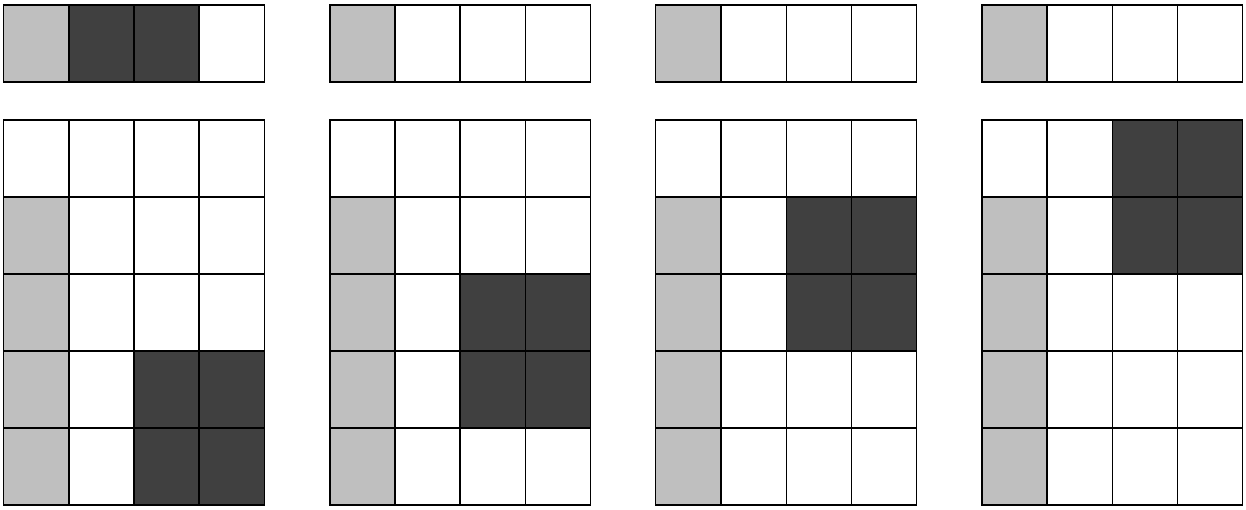
1. Kezdjük egy egyszerű kérdéssel! Látjuk, hogy mindegyik tetrominó területe 4 egység. A területek azonosak, vajon azonosak lesznek a kerületek is? - Kiszámítva az egyes tetrominók kerületét kapjuk, hogy a négyzet alakú tetrominó kerülete 8 egység, a többi tetrominó kerülete pedig 10 egység.
2. Az 5 tetrominó együttes területe 20 területegység. Vajon elhelyezhető-e az 5 tetrominó egy olyan téglalapban, amelynek 20 egység a területe?

Több ilyen 20 egység területű téglalap is van: 1×20, 2×10 és 4×5. Könnyen látható, hogy az összes tetrominó legfeljebb a 4×5-ös téglalapban helyezhető el. Próbálkozásainkat érdemes rendszerbe foglalni. (A rendszerezést úgy végezzük, hogy csak azokat az eseteket soroljuk fel, amelyek forgatással vagy tükrözéssel nem vihetők egymásba.) Azt a tetrominót helyezzük el először a téglalapba, ahol egy sorba 4 négyzetlapot tettünk. Az egyik lehetséges elhelyezés:

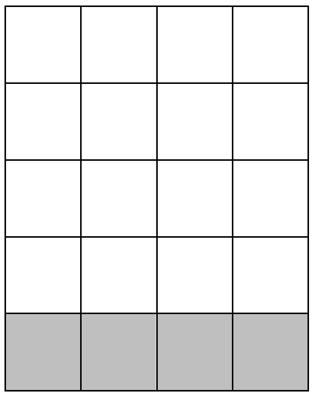


Ezután helyezzük el a négyzet alakú tetrominót a téglalapba. A négyzet alakú tetrominó elhelyezésének különböző lehetőségeit mutatják az alábbi ábrák.

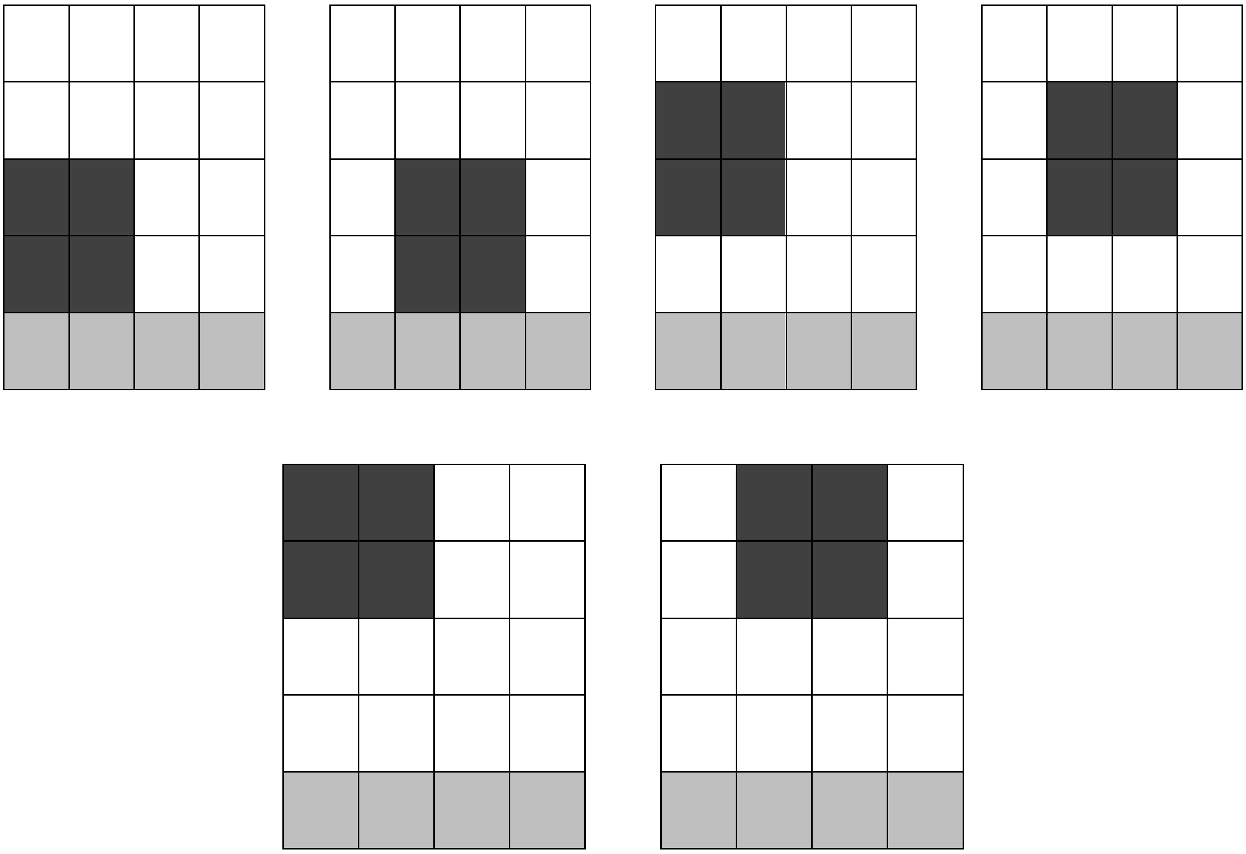




Mindegyik esetben elég könnyen látható azonban, hogy a téglalapok üres helyei nem tölthetők ki a megmaradt tetrominók segítségével.
Helyezzük le a másik lehetséges módon a tetrominót!



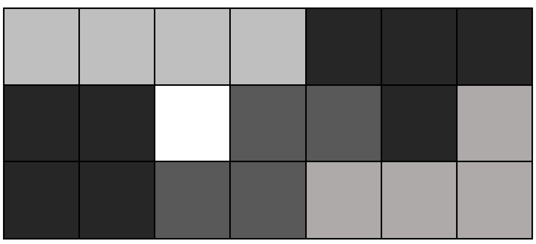
Ezután ismét helyezzük el a négyzet alakú tetrominót a téglalapba. A négyzet alakú tetrominó elhelyezésének különböző lehetőségeit mutatják az alábbi ábrák.



Mindegyik esetben elég könnyen látható azonban ekkor is, hogy a téglalapok üres helyei nem tölthetők ki a megmaradt tetrominók segítségével.

Mivel a kiinduló tetrominót (ahol egy sorba 4 négyzetlapot tettünk) más módon már nem tudjuk elhelyezni a 4×5-ös téglalapba úgy, hogy a többi tetrominót is el tudjuk helyezni, így látható, hogy az 5 darab tetrominó nem helyezhető el a 4×5-ös téglalapban.

Azonnal felmerül bennünk a kérdés, hogy melyik az a téglalap, amelyben már elhelyezhető az 5 tetrominó? Könnyen látható, hogy a 7×3-as téglalapban már elhelyezhető az összes tetrominó. Egy lehetséges kitöltést szemléltet az alábbi ábra. (Az egyetlen négyzetet, ahová nem került tetrominó fehéren hagytuk.)



- Tevékenységek pentominókkal
  - Pentominó készlet előállítása

Miután korábban előállítottuk a pentominó készletet, érdemes játszani a következő számítógépes verzióval is. Ebben a játékban olyan készletet találunk, melyben néhány pentominó többször is szerepel. A feladat az, hogy olyan pentominó készletet állítsunk össze, amelyben minden elem csak egyszer szerepel. (A játék célja az alak és forma azonosság felismerése és a kombinatorikus gondolkodás fejlesztése.)

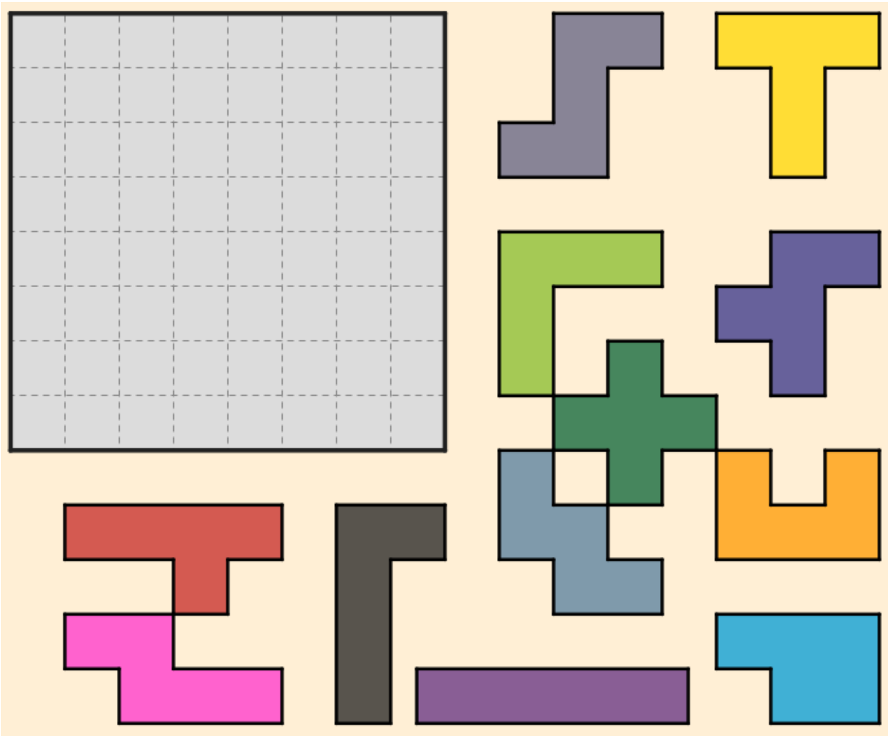
http://tananyag.geomatech.hu/b/509221#material/705053

Természetesen, a játék játszható színes kartonpapírból kialakított pentominókkal is.

- Kirakó pentominókkal

A tetrominókkal történő lefedést megpróbálhatjuk pentominókkal is. Láthattuk azonban a tetrominók esetében, hogy egyáltalán nem egyszerű feladat annak az eldöntése, hogy egy adott területű téglalap lefedhető-e hézagmentesen a rendelkezésre álló alakzatokkal vagy sem. Így pentominóknál célszerűbb megpróbálkozni egy könnyebb feladattal. Ebben a játékban egy 8×8-as (64 egységnyi területű) négyzet alakú táblára kell elhelyezni a 12 pentominót úgy, hogy a tábláról elem nem lóghat le, egymást az elemek nem fedhetik. (Az elemeket a játék során lehet forgatni és tükrözni is.)

Megjegyzés: A 8×8-as táblát alkotó négyzetlapok és a pentominókat alkotó négyzetlapok természetesen egyformák. Lerakásnál a pentominók négyzetlapjainak illeszkedniük kell a tábla négyzeteire.



http://tananyag.geomatech.hu/material/simple/id/508657#material/1299197

Természetesen, a kirakó játszható színes kartonpapírból kialakított pentominókkal és a hozzájuk tartozó 8×8-as táblával is.

➢ Játékok pentominókkal

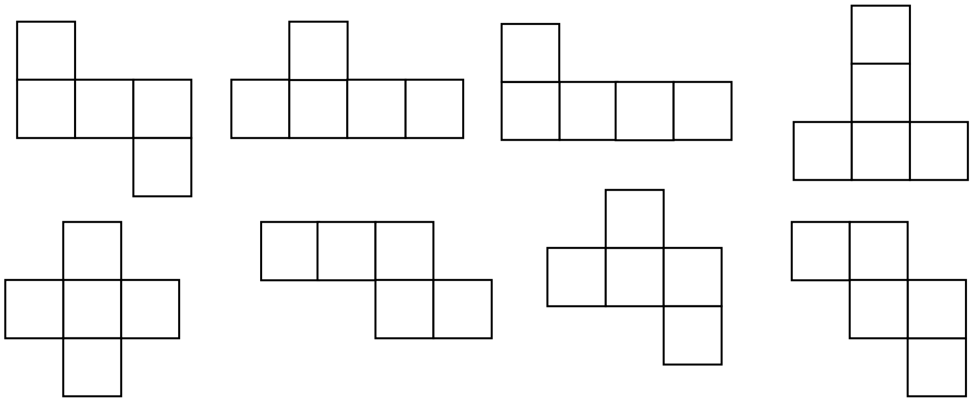
Ezek stratégiai játékok, amelyet 2 gyerek játszhat egymás ellen. A játékokban az előző kirakóban bemutatott 8×8-as táblára kell elhelyezni a 12 pentominót úgy, hogy a tábláról elem nem lóghat le, egymást az elemek nem fedhetik. (Az elemeket a játék során lehet forgatni és tükrözni is.)

- Két játékos játszik. Felváltva tesznek tetszőleges pentominót a játéktábla tetszőleges helyére úgy, hogy a pentominók négyzetlapjai illeszkednek a tábla négyzeteire. Nyer, aki az utolsó pentominót le tudja tenni.
- Szintén két játékos játszik. Miután A játékos letett egy pentominót, a B játékos kezébe adja, amit le kell tennie. B lerakja, majd A kezébe adja a következőt. És így tovább, míg valamelyik már nem tud rakni. Szintén az nyer, aki az utolsót lerakja.

A játék játszható színes kartonpapírból kivágott pentominókkal és a hozzájuk tartozó 8×8-as táblával, valamint a következő számítógépes verzióval is: http://tananyag.geomatech.hu/b/508655#material/1299161

- Lépjünk ki a térbe!
  - Hány olyan pentominó van, amely egy négyzettel kockahálóvá egészíthető ki?

  Válasz: Azok a pentominók egészíthetők ki kockahálóvá, amelyeket felül nyitott dobozzá lehet összehajtani.
  8 darab ilyen pentominó van, ezek találhatók meg a következő ábrán.

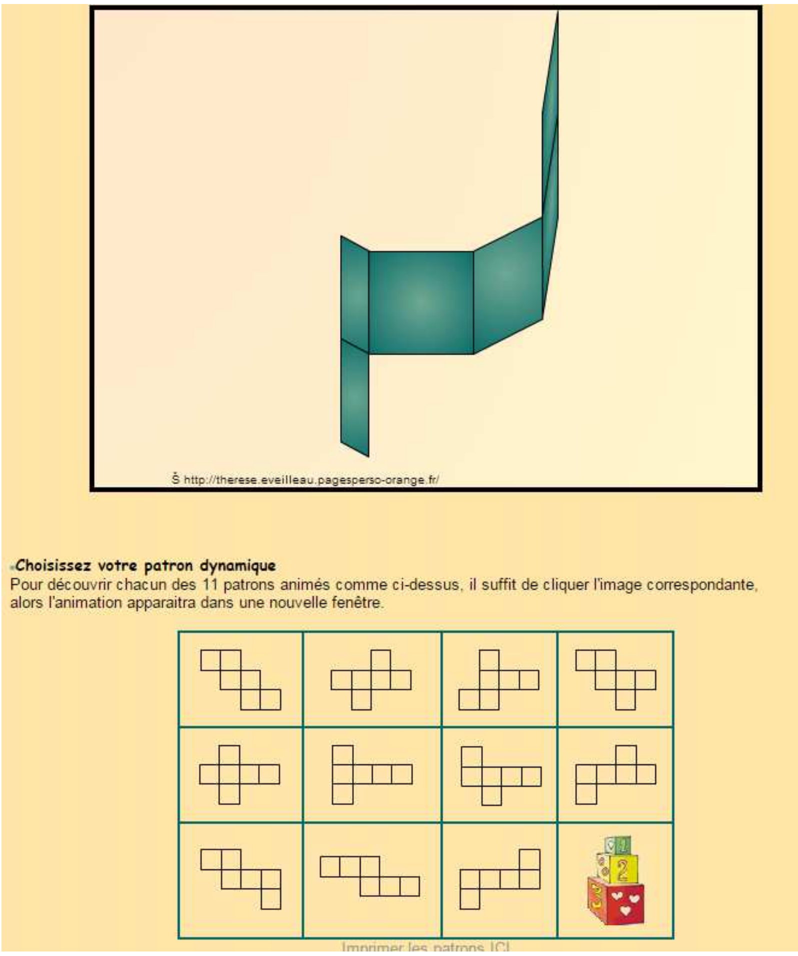


  - Vizsgáljuk meg, hogy ha egy pentominót kockahálóvá lehet kiegészíteni, akkor hányféleképpen tehetjük ezt meg!

  Válasz: Ha egy pentominó kockahálóvá egészíthető ki, akkor egy felül nyitott dobozzá lehet összehajtani. A doboz hiányzó tetejének 4 oldalához illeszthetjük az új négyzetlapot, így ha egy pentominót ki lehet egészíteni kockahálóvá, akkor 4-féleképpen lehet.
  - Vizsgáljuk meg, hogy a kocka mind a 11 kockahálója létrejön-e a fenti 8 pentominó négyzettel történő kiegészítése során?

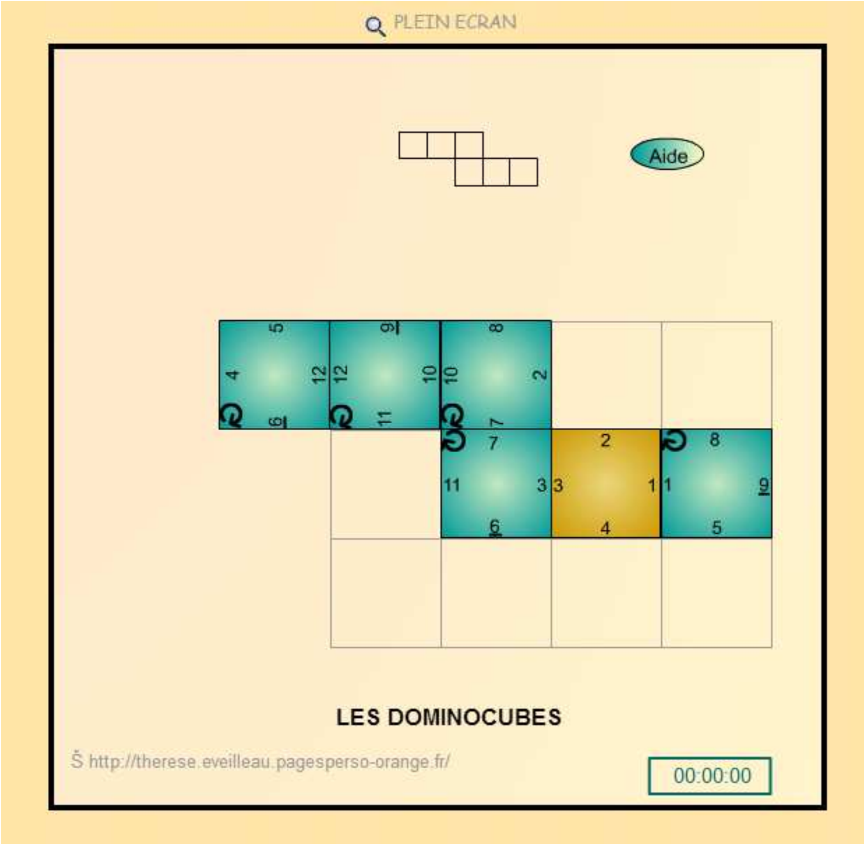
  Válasz: Könnyen látható, hogy a kocka mindegyik hálója létrejön a pentominók kiegészítésével.

A kockahálók mindegyike megtalálható az alábbi oldalon, ahol térbeli animációk is szemléltetik a kockahálókból a kockák létrehozását.



http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/cube_patrons.htm

Az alábbi játékban az ábrában található kék négyzetek mozgatásával és forgatásával (figyelembe véve azt is, hogy a közös oldallal rendelkező négyzetlapok esetében a számoknak egyezniük kell) a kocka mindegyik kockahálója előállítható.



http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/dominocube.htm

Természetesen, a játék könnyen előállítható színes kartonpapírból a fenti módon kialakított négyzetlapokkal is.

Az itt leírt gondolatok nagyon sokféle módon folytathatóak tovább. Például a kirakásokat a Blokus játék alapján most négyzetlapokból készítettük, de használhattunk volna más téglalapokat? Más négyszögeket? Háromszögeket?