A két alapkompetencia: az anyanyelv és a matematika

Bácsi János

Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Gyakorló Általános és Alapfokú Művészeti Iskolája, Napközi otthonos Óvodája, Szeged

bacsi@jgypk.u-szeged.hu

Nap mint nap lehet iskolákban hallani már felső tagozattól azokat a megállapításokat, hogy valaki humán vonalon akar továbbtanulni, mert neki nem megy a matematika. Mások reál tagozatra készülnek, mert nem szeretik a verselemzést, viszont szívesen gondolkodnak el matematikai problémákon. Megítélésem szerint egy bizonyos életkorig (a középiskolai tanulmányok befejezése), valamint egy bizonyos ismeretanyag megszerzéséig nincs olyan, hogy valaki humán vagy reál beállítottságú, mert mind a matematikai, mind az anyanyelvi alapismeretek megszerzése nélkülözhetetlen a többi tananyag megtanulásához, ezért az elemi matematikát és a szövegértés szintjeit mindenkinek egyformán meg kell tanulnia ahhoz, hogy sikeresen boldoguljon az életben. Ezért nevezem az anyanyelvi- és a matematikai kompetenciákat alapkompetenciáknak. Pedagógiatörténeti érvek is szólnak amellett, hogy valóban az anyanyelvi- és a matematikai kompetencia a két alapkompetencia, hiszen az intézményesített oktatás kereteiben mindig ezt a két tantárgyat tanították a többi tárgyhoz képest a legmagasabb óraszámban (Bácsi, 2015). Valamint rá lehet mutatni arra is, hogy az intelligencia szintje az anyanyelvi- és a matematikai készséggel, vagyis az alapkompetenciákkal korrelál a legjobban. Az intelligencia megközelítésének egyik földrajzi metaforája szerint az intelligencia vizsgálatakor kétféle faktort különíthetünk el: I. általános szellemi képesség = *g* faktor, II. speciális képességek = *s* faktor. A *g* faktornak két alkomponense van: 1. verbális képesség és 2. matematikai képesség. A verbális képesség tovább bontható két komponensre: a) szókincs, b) szövegértés. A matematikai képesség szintén tovább bontható alkomponensekre: a) szöveges feladványok, b) matematikai műveletek (Cincialo & Sternberg, 2007). Már ebből látszik, hogy a verbális- és a matematikai képesség több ponton szorosan összefügg. Például a szöveges feladványok megoldása nem működik szövegértés nélkül, vagy a szókincsből matematikai műveletek segítségével tudunk mondatokat létrehozni stb. Ha megvizsgáljuk az érvényben lévő Nat-ot, még több elválaszthatatlan összefüggést találunk a két alapkompetencia között, ugyanis az érvényben lévő *Nemzeti alaptanterv* definiálja a kulcskompetenciákat. Az anyanyelvi kulcskompetencia esetén a szükséges képességek, készségek, ismeretek és attitűdök között említi az anyanyelvi kommunikáció feltételének megfelelő szókincset, a nyelvtani és az egyes nyelvi funkciók ismeretét, a szóbeli és írásbeli kapcsolattartás típusait, a különböző szövegtípusok ismeretét. A matematikai kompetenciához szükséges képességek, készségek, ismeretek és attitűdök esetén pedig a következőket írja: *„A matematikai ismeretek magukban foglalják a számok, mértékek, struktúrák, az alapműveletek és az alapvető matematikai fogalmak jelölésének készség szinten alkalmazható tudását. A matematikai kompetencia azt jelenti, hogy felismerjük az alapvető matematikai elveket és törvényszerűségeket a hétköznapi helyzetekben, elősegítve a problémák megoldását a mindennapokban, otthon és a munkahelyen. E* *kompetencia teszi lehetővé a törvényszerűségek felismerését a természetben, és alkalmassá tesz az érvek láncolatának követésére, a matematika nyelvén megfogalmazott törvények megértésére”* (Nemzeti alaptanterv, 2012:10654). Érdemes lenne az anyanyelvi- és a matematikai kulcskompetencia képességek, készségek, ismeretek és attitűdök elemeinek a tételes összevetése, de e munka keretei között erre nem vállalkozom. Az összefüggések egy részét már vizsgáltam az anyanyelv szintaktikai- és szemantikai szabályainak matematikai szabályokhoz hasonlításával, megfeleltetésével, hiszen így meg tudom könnyíteni a matematikai összefüggések megértését. Ezekre a megfeleltetésekre mutattam néhány példát a reflexivitásra - irreflexivitásra, szimmetriára – antiszimmetriára, tranzitivitásra és a metszethalmaz fogalmára vonatkoztatva (Bácsi, 2015). Szintén előző munkáimban már használtam a nyelv definíciójaként a halmazelméleti megközelítést (Bácsi, 2001, 2006), vagyis a leíró nyelvészetet olyan halmazként definiáltam, amelynek négy részhalmaza van: fonológia, morfológia, szintaxis és szemantika. Ezt a következőképpen ábrázolhatjuk: L.: = [{fonológia} {morfológia} {szintaxis} {szemantika}]. A morfológia elemhalmaz, hiszen valamennyi egynyelvű szótár kilistázza az adott nyelv morfémáit, a másik három halmaz pedig szabályhalmaz. A fonémákat definiálhatjuk a képzés helye, a képzés módja és egy megkülönböztető jegy alapján. A szintaxis szabályhalmaz, amely azokat a szabályokat tartalmazza, amely előállítja egy nyelv valamennyi grammatikailag jól formált mondatát, és csak azokat. A szemantika szintén szabályhalmaz, amely azokat a szabályokat tartalmazza, amelyek segítségével a nyelv és a világ között tudunk kapcsolatot teremteni. Ha a nyelv definiálására ezt a megközelítést alkalmazom, akkor máris kapcsolatot teremtek az anyanyelv és a matematika között, hiszen a gyerekek a tanterv alapján már alsó tagozatban találkoznak a halmazba sorolás fogalmával két – három közös tulajdonság alapján. A felső tagozatban ezek az ismeretek koncentrikusan bővülnek, megtanulják, hogy egy halmazt úgy lehet definiálni, ha felsorolom a halmaz összes elemét, vagy megadom azokat a szabályokat/tulajdonságokat, amelyek kiválasztják egy halmaz összes elemét. Azután 8. osztályban már problémamegoldásra használjuk a következő fogalmakat: alaphalmaz, üres halmaz, részhalmaz, kiegészítő halmaz, A és B halmaz közös része, -különbsége és -egyesítettje (Hajdu, 2002). Tudom, hogy a magyartanárok jobban szeretik a nyelv definiálásában a rendszerként való megközelítést, mint azt a legtöbb nyelvész is teszi (A. Jászó, 1995; Crystal, 2003; Telegdi, 1977), de nekem pont az a célom, hogy olyan példákat mutassak munkámban, amely feltárja az anyanyelv és a matematika közötti szorosabb összefüggéseket, és ebben a munkában ezt éppen a halmazelmélet és a mondatszitaxis valamint mondatszemantika területén teszem. Hipotézisem az, ha anyanyelvi példákon keresztül tudunk matematikai összefüggéseket demonstrálni, magyarázni, vagy matematikai összefüggések alapján mutatjuk meg, hogyan működik az anyanyelvünk, akkor ezzel fejleszteni tudjuk mindkét alapkompetenciát, vagyis egy tudatosabb, megtervezettebb tantárgyi koncentráció az anyanyelv és a matematika között mindkét alapkompetencia fejlődésére pozitívan fog hatni, ami elősegíti a többi tantárgy sikeres tanulását.

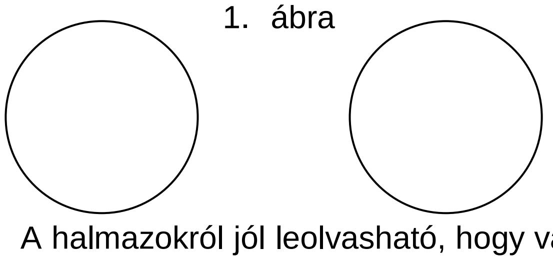
Induljunk ki abból a tényből, hogy az anyanyelv nagyon sok területen használja a halmazba sorolást az elemek közös tulajdonsága alapján. Így tesz például, amikor a beszédhangokat a magánhangzók és a mássalhangzók halmazába sorolja. Vagy tovább csoportosítja a magánhangzókat hosszú és rövid hangokra, és a fonológia szintjén még nagyon sok halmazt és részhalmazt képeztet, néha még le is rajzolja vagy rajzoltatja. De ez csak a fonológia szintje, a leíró nyelvészet első halmaza. Még a morfológia szintjén is találunk kísérleteket a halmazba sorolásra, hiszen a főneveket az alapján tudjuk egy halmazba sorolni, hogy mindegyik megnevez. Ezen a halmazon belül el tudunk különíteni két részhalmazt, a köznevekét és a tulajdonnevekét. A köznevek esetén további részhalmazok különíthetők el, a megszámlálhatók és a megszámlálhatatlanok. Stb. Viszont a szófajok esetén már felmerül az a probléma, hogy nem lehet minden szófajt halmazba sorolni. Gondoljunk csak bele, hogyan nézne ki például az *áttesz* halmaz, vagy a *nagyobb*, vagy az *inkább* halmaz? Nem lehet ezeket a morfémákat halmazként definiálni, hiszen ezek kettő vagy több argumentumú függvények. Már Deme László hajlott egy olyan megközelítésre hogy az igevonzatok szemléltetésére a kémia tudományából vegyen hasonlatot: *„A maga kötelező környezetét legjellemzőbben az ige szabja meg. Nyilván azért, mert sajátos – állítmányi – természeténél fogva központja, magva , s ezzel mintegy szervezője a mondatnak. – Az igék azonban e tekintetben sem egyformák, típusonként más-más mennyiségű és minőségű a kötelező bővítményük. Ha a kémiából veszünk hasonlatot, azt mondhatjuk: az ige vegyértéke (azaz kötelező bővítményeinek száma) nullától négyig terjed. Legáltalánosabb, leggyakoribb vonzata az alany (mint az igében jelzett mozgásforma hordozója), egyik népes alfajának jellemző bővítménye ezen kívül a tárgy (mint az igében jelzett cselekvés szenvedő alanya), és gyakori vonzat mellette a (különféle körülményeket jelölő) határozó* (Deme, 1984:144). Az ilyen tudományos metaforák nagyban segítik, megkönnyítik a megértést. Éppen ezért nézzük meg, hogy a szófajokat és a mondatszitaxist hogyan lehetne matematikai hasonlatokkal szemléletesebbé tenni azzal a céllal, hogy mind a matematikát, mind az anyanyelvet könnyebben megértsük. A munkahipotézis kedvéért csak az alapszófajokra vonatkoztatva – a számnevek és a határozószók kivételével - alakítsunk ki két csoportot:

I. Halmazként viselkedő szófajok: egyargumentumú igék, főnevek, alap- és felsőfokú.
II. Függvényként viselkedő szófajok: kettő vagy több argumentumú igék, középfokú melléknevek.

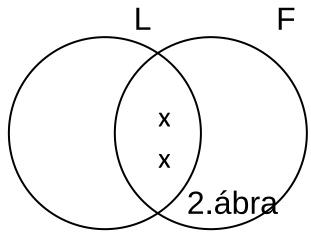
Kezdjük a vizsgálatot a számnevekkel (a határozószókkal e keretek között nem foglalkozom, mert azok már egy adott alaphalmaz jelentésterjedelmét szűkítik, mint azt a későbbiekben látni fogjuk), hiszen azok egyik csoportba sem kerültek be, méghozzá azért nem, mert a szintaktika (a leíró nyelvészet harmadik részhalmaza) szempontjából a számneveket determinánsoknak nevezzük, amely két halmaz eleme között teremt kapcsolatot. Induljunk ki abból a kérdésből, hogy miért nem grammatikus a következő mondat: *Ló fut.* A válaszhoz használjunk halmazelméleti megközelítést, és rajzoljuk, rajzoltassuk le a mondatot alkotó morfémákat halmazként, így az első ábrán szereplő halmazokat kapjuk.

'lovak halmaza' *'futó egyedek halmaza'*

1. ábra



A halmazokról jól leolvasható, hogy van a *'lovak'és a 'futó egyedek'* halmaza, de a két halmaznak semmi köze nincs egymáshoz, ezért nem tekinthető a *„Ló fut."* szósor grammatikailag jól formált mondatnak, hiszen a grammatikai jólformáltság feltétele a mondatot alkotó szavak (mondatrészek) közötti kapcsolat feltárhatósága, amelyet jól tudunk halmazokkal ábrázolni és értelmezni, mint azt a későbbiekben látni fogjuk. Most fordítsuk meg a munkamenetet, rajzoljuk fel a 2. ábrán lévő halmazokat, és kérjük meg a tanulókat, hogy írjanak olyan mondatot, ami a halmazábrának megfelel.



2.ábra

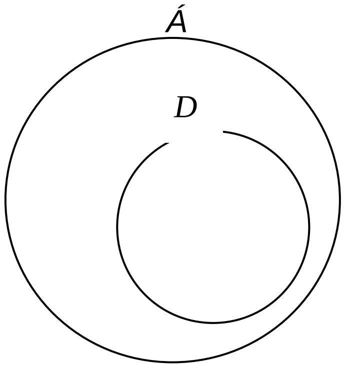
A tanulók a következő mondatokat fogják alkotni: *Két ló fut.* vagy *Fut két ló.* A 2. ábráról a természetes nyelvi megközelítésen keresztül el tudunk jutni a metszethalmaz fogalmához, vagyis van pontosan két olyan valami, amire egyszerre igaz, hogy *'ló'* is, és *'fut'* is. Valamint az is leolvasható a 2. ábráról, hogy nem kell minden lónak futni, és nem kell minden futó egyednek lónak lenni. Ezek megbeszélése után már könnyen jutunk el a metszethalmaz matematikai meghatározásához: *„Két halmaz metszetének (közös részének, szorzatának) nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek mindkét halmaznak az elemei. Az* **A** *és* B *halmaz metszetének jele:* $A \cap B$*. (Olvasd: „A*metszet B*" vagy „*A *és* B *metszete"* (sulinet.hu). Ezek után feltehetjük a következő kérdéseket: 1. *Hogyan hangzik az a mondat, ahol a 2. ábrán látható metszetben nyolc elem van?* 2. *Hogyan hangzik az a mondat, ahol a 2. ábrán látható metszet nem üres, de nem tudjuk számszerűen az elemeket?* (Eljutottunk a határozatlan számnevek – determinánsok – fogalmához: néhány, sok, kevés stb.) 3. *Hogyan hangzik az a mondat, ahol a 2. ábrán látható metszet az üres halmaz, miért tudunk ilyen mondatokat is létrehozni?* (Eljutottunk az üres halmaz fogalmához.)

A determináns fogalmának tisztázása után nézzük meg, hogy a I. pontban felsorolt szavakat hogyan lehet halmazként definiálni: 1. A cselekvést jelentő igekötő nélküli tárgyatlan igék halmazok, pl.: fut = *'a futó egyedek halmaza'*, mászik =*'a mászó egyedek halmaza'*, ül = *'az ülő egyedek halmaza'* stb. 2. A történést jelentő igék halmazok, pl. hullik = *'a hulló egyedek halmaza',* lebben = *'a lebbenő dolgok halmaza',* ázik =*'az ázó dolgok halmaza'* stb. 3. A létigék halmazok, pl.: van = *'a létező dolgok halmaza',* él = *'az élő egyedek halmaza',* létezik = *'a létező dolgok halmaza'* stb. 4. A főnevek halmazok, pl. asztal =*'az aztalok halmaza',* kutya = *'a kutyák halmaza',* sárkány =*' a sárkányok halmaza'* stb. 5. Az alap- és felsőfokú melléknevek halmazok, pl.: jó *='a jó dolgok halmaza',* magas *='a magas dolgok halmaza',* leghosszabb *='a leghosszabb dolgok halmaza'* stb. Ezek között a halmazok között – a grammatika szabályainak figyelembe vételével – már tudunk metszeteket képezni, vagyis mondatokat alkotni. Pl.: Öt kutya mászik. Azaz *'A kutyák halmazának és a mászó egyedek halmazának van metszete, és a metszetben pontosan öt elem van, vagyis öt entitásra igaz egyszerre, hogy kutya és mászik.'* Két sárkány ázik. Azaz *'a sárkányok halmazának és az ázó egyedek halmazának van metszete, és a metszet pontosan két elemet tartalmaz, vagyis két entitásra igaz egyszerre, hogy sárkány és ázik.'* stb.

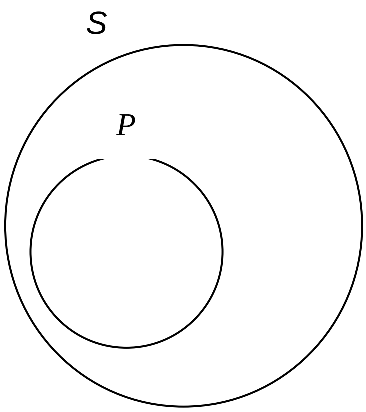
A II. csoporba sorolt függvényként viselkedő szófajokról itt csak annyit jegyzek meg, hogy belőlük is „készíthetünk" halmazt, hiszen egy *n* argumentumú függvényből úgy hozhatok létre egyargumentumú függvényt, hogy *n – 1* argumentumát lekötöm, és egy egyargumentumú függvény kezelhető halmazként, besorolható a I. csoportba. Pl.: *eszik* két argumentumú függvény (alany és tárgy), lekötöm a tárgyat: *vasat eszik,* így máris létrehoztam *'a vasat evő entitások halmazát,* vagy *magasabb* két argumentumú függvény (mi, minél), lekötöm a hasonlító határozót: *magasabb a toronynál,* így máris létrehoztam *'a toronynál magasabb dolgok halmazát.* Vagy nézzünk még egy három argumentumú függvényre példát: *levesz* ki, mit, honnan), lekötöm az alanyt és a tárgyat: *a fiú leveszi a könyvet,* így máris létrehoztam *'a fiú által levett könyvek halmazát'* stb.

Utolsó kérdés, hogy mi a helyzet a határozókkal és a jelzőkkel. A határozók és a jelzők szűkítik egy adott alaphalmaz jelentésterjedelmét, vagyis valódi részhalmazt hoznak létre: „*Legyen az A halmaz részhalmaza a B halmaznak. Ekkor A* ***valódi részhalmaza*** *B-nek, ha A nem egyenlő magával B-vel, azaz van olyan B-beli elem, amely nincs benne A-ban. Ekkor azt is mondjuk, hogy a B* ***szigorúan tartalmazza*** *A-t, és így jelöljük:* $A \subsetneq B$*. Néhány szerző az* $A \subset B$ *jelölést használja ugyanerre, akkor a tartalmazást jelölik így:* $A \subseteq B$" (sulinet.hu). Pl.: ázik = '*az ázó egyedek halmaza',* délben ázik = *'délben ázó egyedek halmaza'.* A harmadik ábrán leolvasható a halmazokkal történő ábrázolás, *Á= 'ázó egyedek', D='délben ázó egyedek'.*

3. ábra



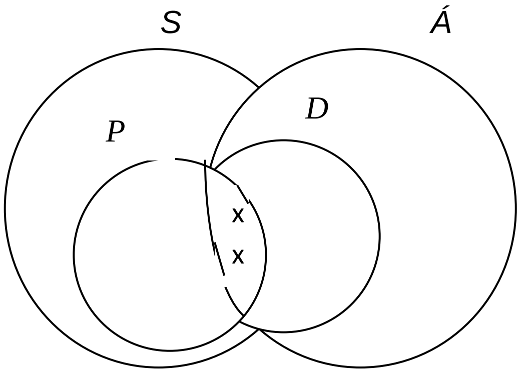
A határozók általában az állítmány jelentésterjedelmét csökkentik, a jelzők pedig általában az alanyét (e keretek között legalábbis ezekkel foglalkozom). Nézzünk példát az alany jelentésterjedelmének csökkentésére! Sárkány *='sárkányok halmaza',* pöttyös ='*pöttyös entitások halmaza'.* A 4. ábráról leolvasható a halmazokkal történő ábrázolás, *S = sárkányok halmaza, P = pöttyös sárkányok halmaza.*



4. ábra

Végül elkészíthetjük a *Két pöttyös sárkány ázik délben* mondat jelentésének és szerkezetének halmazokkal történő ábrázolását, 5. ábra. *P = 'pöttyös egyedek halmaza', S = 'sárkányok halmaza, Á = 'ázó egyedek halmaza', D = délben történő események halmaza'.*

5.ábra



Akárhány határozót illetve jelzőt zsúfolok egy mondatba, az mindig csak az alaphalmaza jelentésterjedelmét fogja szűkíteni, és minden esetben ábrázolható lesz halmazokkal. Ha pedik az ábrázolást is elvégzem, segítek a mondatok értelmezésében, hiszen azonnal láthatóvá válik, hogy mi – mivel – milyen kapcsolatban van. Ha először a természetes nyelv mondatait ábrázolom halmazok segítségével, és feltárom, magyarázom az abban rejlő összefüggéseket, utána már könnyebb lesz a matematikai problémák megoldása halmazok segítségével. Hiszen az emberi megértés alapműködése abban áll, hogy a létező és elképzelt dolgokat létező és elképzelt tulajdonságaik alapján halmazokba soroljuk, és megpróbáljuk leírni a halmazok közötti összefüggéseket.

Mutattam néhány példát arra, hogy milyen mélyebb összefüggések lehetnek a matematikai és a nyelvi szabályok között. Mindezt azért tettem, mert hiszek abban, hogy a két tantárgy koncentrációjának tudatosabb megvalósítása megkönnyíti az ismeretszerzést, megvalósítja a két alapkompetencia optimális fejlesztését, így intelligensebb emberek kerülhetnek ki az iskolák falai közül. Munkámat nem tekintem befejezettnek, hiszen nagyon sok anyanyelvi és matematikai összefüggés tehető ekvivalenssé, és ez lehet egy jövőbeli kutatás célja.

Irodalomjegyzék

A. Jászó Anna (1995). *A magyar nyelv könyve*. Budapest: Trezor.
Bácsi János (2001). A megkésett beszédfejlődés nyelvészeti aspektusai. *Pediáter*, (10), 75-81.
Bácsi János (2006). Merre tart a nyelvtudomány? *Gyakorlós Füzetek*, 4.
Bácsi János (2015). Minden tudás alapja a verbális- és a matematikai készség. *Módszertani Közlemények*, 55 (4).
Cincialo, T. A., & Sternberg, J. R. (2007). *Az intelligencia rövid története*. Budapest: Corvina.
Crystal, D. (2003). *A nyelv enciklopédiája*. Budapest: Osiris.
Deme László (1984). *A beszéd és a nyelv*. Budapest: Tankönyvkiadó.
Hajdu Sándor (2002). *Matematika 8*. Budapest: Műszaki.
Nemzeti alaptanterv (2012). *Magyar Közlöny*, 66.
Telegdi Zsigmond (1977). *Bevezetés az általános nyelvészetbe*. Budapest: Tankönyvkiadó.
http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/halmazmuveletek-es-tulajdonsagaik-i/metszetkepzes [2016.01.10.]