A szöveges feladatok megoldásának nehézségeiről a nyolcadik osztályos diákok körében

© Fülöp Zsolt
Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet, Szeged
fulop.zs32@freemail.hu

A korszerű matematika oktatás egyik fő célja a problémamegoldással kapcsolatos kompetenciák fejlesztése annak érdekében, hogy a tanulók a mindennapi életben is hasznosítható tudást kapjanak. Kutatások és tanulmányok igazolták, hogy a tanulóknak a szöveges feladatok megoldása terén nagy nehézségeik vannak a következőkben: a feladat szövegének megértése, az adatok közötti összefüggések helyes értelmezése, a feladat lefordítása az algebra nyelvére, az eredmények helyes értelmezése és az ellenőrzés tudatos végrehajtása. Ahhoz, hogy a tanulók fejlesztése sikeres legyen, ismernünk kell azokat a tényezőket, amelyek a rossz megoldások hátterében állnak, ugyanis csak ezeknek az ismereteknek a birtokában dolgozhatunk ki megfelelő oktatási stratégiákat és módszereket.

A problémamegoldás elméleti háttere

Az iskolai oktatás során a diák számára problémát jelenthet például egy olyan feladat, amelyhez hasonlóval még nem találkozott és a megoldást tanári segítség nélkül, saját tudására támaszkodva kell megoldani (Lénárd, 1963; Pólya, 1967). A diák eszköztárát a pedagógus alapozza meg az oktatási folyamat során. A jó pedagógus a saját eszköztárából taktikusan válogatja meg azokat a módszereket és eszközöket, amelyeket a diák rendelkezésére tud bocsátani, ahhoz, hogy a diák problémamegoldó képességei a megfelelő ütemben fejlődjenek. Ilyenkor mindig szem előtt kell tartania, hogy a diákok probléma megoldási képessége az egyes komponensek tekintetében milyen szinten áll, mik azok a területek, amelyeket fejleszteni kell. A matematika oktatása során a szöveges feladatok megoldása jelentheti az egyik tipikus probléma-szituációt. Nagyon sok pedagógus úgy vélekedik, hogy a szöveges feladatok típusokba rendezhetők, betaníthatók és begyakoroltathatók, ezáltal bizonyos megoldási módszereket „oktatni lehet”, így már nem problémáról, hanem egyszerűen feladatról beszélünk, amelyet a diák előzőleg betanult módszerek segítségével megold. A diák problémamegoldó képességeinek hatékony fejlődéséhez viszont szükség van minél több olyan szöveges feladat felvetésére, amellyel a diák még nem találkozott, és amelyhez a megoldási algoritmust neki kell megtalálnia, hatékonyan alkalmazva a rendelkezésére álló eszközöket. A szöveges feladatok megoldása terén az algebrai szimbólumok és összefüggések alkalmazása mérföldkőnek számít a hetedikes és nyolcadikos diákok eszköztárában. Ilyenkor sajátítják el az algebrai szimbólumok használatának alapjait, a szöveges feladatok aritmetikai módszerekkel történő megoldását részben kiszorítják az algebrai kifejezések alkalmazásával kapcsolatos feladat megoldási módszerek. Az utóbbi években számos kutatási tevékenység irányult annak a feltárására, hogy melyek azok az akadályok és nehézségek, amelyekkel a diákok szembesülnek az algebrai alapfogalmak elsajátítása során, illetve melyek azok a legfőbb hibák, amelyek az algebra eszközeinek az alkalmazása során adódnak (MacGregor et al., 1997; Clements, 1980; Egodawatte, 2009). Az említett szerzők műveiből kiderül, hogy azok a hibák, melyeket a diákok az algebrai kifejezések alkalmazása során elkövetnek nagymértékben tulajdoníthatók az algebra és aritmetika közötti alapvető különbségeknek. Ahhoz, hogy a diák az algebra nyelvén hatékonyan érveljen, szakítania kell néhány aritmetikai konvencióval és meg kell tanulnia helyesen kezelni az algebra szimbólumait. Célom volt megvizsgálni, hogy a nyolcadik osztályos diákok milyen mértékben alkalmazzák az algebrai szimbólumokat és módszereket a szöveges feladatok megoldása során, illetve milyen típushibák fordulnak elő leggyakrabban az algebrai szimbólumokkal történő manipuláció során?

Ha a tanár olyan szöveges feladatokat alkot, melyekkel a diák még nem találkozott, akkor a kijelölt feladat tekinthető egy olyan matematikai problémának, amelynek a megoldása során nyomon követhető a Pólya-féle modellben meghatározott négy lépés:

1. a probléma megértése,
2. tervkészítés,
3. a terv végrehajtása,
4. ellenőrzés.

A probléma megértése terén sok esetben a feladat szövegének helyes értelmezése jelent nehézséget a tanuló számára. A terv készítése és a terv végrehajtása magában hordozza a diák által alkalmazott módszereket, amelyek kapcsolatban lehetnek bizonyos tanórán tanult és begyakorolt megoldási sémákkal vagy pedig olyan ötleteket tartalmazhatnak, melyek a diák önálló, kreatív gondolkodását tükrözik. A tanuló az ellenőrzés során győződhet meg arról, hogy a feladatot helyesen oldotta meg. Az általános iskolás diákok körében ez egyszerűen azt jelenti, hogy a feladat eredményét összevetik az adatokkal és a feladat szövegében szereplő feltételekkel, itt még nem találkozunk olyan vizsgálatokkal, mint például új problémák felvetése az adatok változtatásával, általánosítás, stb., amelyek a Pólya György műveiben megtalálhatók.

A kutatás

A probléma megoldás folyamatának vizsgálatára, a megoldás során alkalmazott módszereknek, valamint a leggyakrabban előforduló hibáknak az elemzésére egy 6 szöveges feladatból álló feladatlapot állítottam össze. A feladatlapot összesen 86 nyolcadik osztályos tanuló oldotta meg. A tanulók három különböző iskolából kerültek ki, az egyik iskolából kettő, míg a másik két iskolából egy-egy osztály minden tanulója megoldotta a feladatsort. A tanulók többsége a tanórákon átlagos vagy átlagon aluli teljesítményt mutatott. A feladatok nehézségi fokozatát úgy választottam meg, hogy a feladatok ezeknek a tanulóknak a számára is hozzáférhetők legyenek. A mintában szereplő tanulók előzetes teljesítménye alapján feltételeztem, hogy a leggyakoribb típushibák elő fognak fordulni, így ezeket is elemzés tárgyává lehet tenni. A tanulók rendelkezésére álló idő 50 perc volt. A felmérés időtartama alatt jelen voltak az illető osztályokban tanító tanárok is. Megkértük a tanulókat, hogy a megoldások lépéseit minél részletesebben rögzítsék, minden feladat esetében próbáljanak valamilyen megoldást adni, még akkor is, ha nem emlékeznek az illető feladattal rokon, tanórán gyakorolt feladatra. Külön felhívtuk a figyelmüket, hogy a feladat megoldása után ellenőrizzék az eredményt és adjanak szöveges választ a kérdésre.

Az eredmények értékelése

A feladatlapon szerepelt három feladat, amelyek ugyanarra a modellre vezethetők vissza:

1. *Feladat: Andrásnak és Bélának összesen 156 kitűzője van. Hány kitűzőjük van külön-külön, ha Andrásnak 48 kitűzővel több van, mint Bélának?*
2. *Feladat: Anna és Bogi együtt 93 kg, Anna és Cili együtt 95 kg. Anna 3 kg-mal súlyosabb, mint Bogi. Mennyi a lányok tömege külön-külön?*
3. *Feladat: Egy téglalap kerülete 46 cm, a hosszúsága 3 cm-rel nagyobb, mint a szélessége. Mekkorák a téglalap oldalai?*

A három feladat esetében közös, hogy a probléma modelljét két olyan szám meghatározása jelenti, melyeknek ismerjük az összegét és a különbségét. Az 1. Feladat esetében ez tömören a feladat megoldását jelenti, míg a 4. Feladatban egyéb adatok is előfordulnak, ugyanakkor több a meghatározandó ismeretlenek száma. A 2. Feladat egy geometriai probléma, amelyben olyan fogalmak szerepelnek, mint a téglalap kerülete, hosszúsága és szélessége, a tanuló pedig a kerület képletéből jöhet rá, hogy ez a probléma is ugyanarra a modellre vezethető vissza. Célom volt megvizsgálni, hogy az 1. Feladatot sikeresen megoldó tanulók hogyan ismerték fel azt, hogy a 4. Feladat és a 2. Feladat megoldásánál is felhasználható az 1. Feladat megoldási módszere.

1. Feladat. *Értékelés.* Helyes megoldások száma: 28, rossz válaszok rossz megoldási módszer alapján: 39, rossz válaszok indoklás nélkül: 10. Nem adott választ: 9 tanuló.

Tapasztalatok. A helyes megoldást 17 tanuló az algebra mellőzésével, a következő algoritmus segítségével oldotta meg:

$156-48=108$

Béla kitűzőinek száma: $108:2=54$

András kitűzőinek száma: $54+48=102$

Egy tanuló a következőképpen oldotta meg: $156:2=78$ és $48:2=24$, tehát Andrásnak $78+24=102$, Bélának pedig $78-24=54$ kitűzője van.

Az algebrai módszereket 10 tanuló választotta, ezek közül 9 az $x+(x+48)=156$ egyenlet helyes megoldásával ért el eredményt. Egy tanuló helyesen oldotta meg a feladatot két ismeretlenes egyenletrendszer felírásával, ami azért meglepő, mert a két ismeretlenes egyenletrendszerek a 9. osztályos tananyag részét képezik és a tanára nem mutatta be ezeket a fogalmakat a tanórán.

A rossz válaszok a helytelenül választott megoldási módszereknek tulajdoníthatók, a helytelen megoldási módszereket választó 39 tanuló közül 8 számolási hibákat is vétett.

A leggyakoribb rossz válasz: Andrásnak 126, Bélának 30. Ezt a választ 28 tanuló adta, ezek közül egyik a következőképpen érvelt:„156 fele 78, Béláéból elveszünk 48-at, hozzáadjuk az Andráséhoz, Andrásnak lesz 126, Bélának 30”. Ezt a módszert még másik 4 tanuló is választotta, akik nem erre az eredményre jutottak, mivel számolási hibákat is vétettek.

Érdekes, hogy 3 tanuló a százalékszámítás módszerét próbálta alkalmazni, az alapot 156-nak, a százalékértéket 48-nak választották, majd belebonyolódtak a számításokba.

A rossz megoldások esetében egyértelmű, hogy a tanulók nem ellenőrizték a megoldást, ezáltal hiányzott munkáikból a Pólya-féle modell negyedik lépése. Pedig a megoldás ellenőrzése ennek a feladatnak az esetében rendkívül egyszerű, ugyanakkor a tanulókat külön megkértük, hogy hajtsanak végre ellenőrzést.

2. Feladat. *Értékelés*. Helyes megoldások száma: 27, rossz válaszok száma: 46, nem adott választ: 13 tanuló.

Tapasztalatok. A feladatot helyesen megoldó tanulók közül 7 alkalmazott algebrai módszereket, hatan közülük Anna tömegét $x+3$-mal, Bogi tömegét x-szel jelölve az $(x+3)+x=93$ egyenlethez jutottak, melyet megoldva az Anna tömege 48 kg és Bogi tömege 45 kg adódott. A Cili tömegét $95-48=47$ kg művelettel számították ki. Ezen tanulók mindegyike az 1. Feladatot is helyesen oldotta meg algebrai módszerek alkalmazásával, tehát róluk elmondható, hogy viszonylag jól ismerik az algebrai feladatmegoldó módszereket. Egy tanuló három ismeretlenes egyenletrendszer felírásával próbálkozott és helyesen oldotta meg a feladatot. 20 tanuló a következő műveletsor segítségével jutott el a helyes megoldáshoz $93-3=90$, Bogi tömege $90:2=45$ kg, Anna tömege $45+3=48$ kg, Cili tömege $95-48=47$ kg. Ennek a megoldásnak az első része ugyanazt a visszafelé következtetést tartalmazza, amely az 1. Feladat egyik megoldási módszere. Érdekes, hogy a 20 tanuló közül csak 8 volt, aki az 1. Feladatot is helyesen oldotta meg hasonló módszerrel, a többiek az 1. Feladatot elvétették, annak ellenére, hogy az kevesebb adatot és ismeretlent tartalmaz.

6 tanuló találgatással próbálta megoldani a feladatot, a lányok tömegére kitaláltak számokat úgy, hogy a tömegek összegére vonatkozó összefüggések érvényesüljenek, viszont nem érvényesült az Anna és Bogi tömegének különbségére vonatkozó összefüggés. 24 diák kezdetben a $93:2=46{,}5$ és $95:2=47{,}5$ műveletekkel próbálkozott, hibás eredményekre jutottak, sokan közülük számolási hibákat is vétettek. Egy diák érdekes módon hibás gondolatmenettel jó eredményt ért el, megoldása a következő:„$93:2=46$ marad 1, elveszem a 3 kg-ból, marad 2 kg. Anna $46+2=48$ kg, Bogi 45 kg. Cili $95-48=47$ kg.”

3. Feladat. *Értékelés*. Helyes megoldások száma: 12, rossz válasz indoklással: 31, rossz válasz indoklás nélkül: 6, nem adott választ: 37 tanuló.

Tapasztalatok. 3 diák oldotta meg helyesen visszafelé következtetéssel a feladatot, mindegyikük másképpen számolt:„$23:2=11{,}5$; $11{,}5+1{,}5=13$; $11{,}5-1{,}5=10$” „$(46-6):4=40:4=10$; $10+3=13$” „$(23-3):2=20:2=10$; válasz 10 és 13”. Ezek a diákok hasonló indoklással, helyesen oldották meg az 1. és 4. Feladatokat, tehát az ők esetükben elmondható, hogy érzékelik azt, hogy ezek a feladatok egy közös modellre lettek megalkotva. 4 diák a helyes megoldást találgatással, okoskodással, majd utólagos visszaellenőrzéssel érte el, például az egyikük a következőképpen érvelt: ” 4 oldal 10 plusz a hosszúsága $3\cdot 2=46$ cm. Az oldalak 10 és 13.” Algebrai módszer alkalmazásával, egyenletek felírásával 5 diák ért el helyes eredményt. 2 diák próbálkozott még algebrai módszerrel, az egyik helytelenül írta fel az egyenletet, a másik számolási hibát vétett. 29 diák rossz megoldást adott valamilyen hibás indoklással egybekötve. Ezek közül ki lehet emelni 7 diákot, akik azért értek el hibás eredményt, mert a kerületet a két oldal összegével azonosították, egyébként jól számolva és következtetve „a két oldal 21,5 és 24,5” eredményre jutottak (ezeknek a tanulóknak az esetében a kerület fogalma rögzült helytelenül, egyébként a probléma megoldási módszereket helyesen alkalmazták).

4. Feladat. *Három testvér életkorának összege 20 év. Mennyi lesz az életkoruk összege 3 év múlva?*

Értékelés. Helyes megoldások száma: 47, rossz válasz: 25, „nem megoldható": 6, nem adott választ: 8 tanuló.

Tapasztalatok. A helyes megoldók közül 29 tanuló a $20+3+3+3=29$ számítással érte el az eredményt, míg 13 tanuló különböző életkorokat talált ki és ezáltal hidalta át azt a nehézséget, hogy a gyerekek életkora külön-külön nem volt megadva. 5 tanuló a következő algebrai módszerrel ért el helyes eredményt: egy gyerek életkora *x*, ezért $3 \cdot x = 20$, egy gyerek életkora 3 év múlva $x+3$, tehát az életkoruk összege $3 \cdot x + 9 = 20 + 9 = 29$. Az eredmény helyes, viszont ezek a diákok nem érzékelték, hogy az általuk adott megoldás esetén a gyerekek egyenlő életkorúaknak számítanak. Egy ehhez hasonló megoldást adott 2 másik diák, ezúttal viszont nem algebrai módszerrel és a kapott eredmény sem helyes: egy gyerek életkora $20:3=6{,}6$ év, egy gyerek életkora 3 év múlva $9{,}6$ év, ezért életkoruk összege $3 \cdot 9{,}6 = 28{,}8$ év. A rossz válaszok közül 6 diák a $20 \cdot 3 = 60$ év, illetve 8 diák a $20+3=23$ év számítással indokolt. A „Nem megoldható" választ adó diákok közül néhánynak az érvelése: „Ezekből az adatokból nem lehet kiszámítani", „Nem lehet kiszámítani, mert nem tudjuk hány évesek és több megoldás is lenne", „$x+y+z=20$ év, nem megoldható" A legutóbbi választ ugyanaz a diák adta, aki az 1. Feladat megoldásához két ismeretlenes egyenletrendszert írt fel.

5. Feladat. *Egy szálloda 23 szobájában 52 fekvőhely van, a szobák kétágyasak, illetve háromágyasak. Hány kétágyas szoba található a szállodában?*

Értékelés. Helyes válasz: 19, rossz válasz: 41, nem adott választ: 26 diák.

Tapasztalatok. A helyes válaszok egyike sem született algebrai módszerrel. A tanulók közül kettő ábrát készített, ahol a szobákat téglalapokkal, az ágyakat vonalakkal jelölték és ennek segítségével jutottak helyes eredményre. A másik 17 tanuló próbálgatással oldotta meg a feladatot, kezdetben bizonyos értékeket adtak a két- és háromágyas szobák számára vonatkozóan, majd ezeknek a számoknak a változtatásával próbáltak szabályokat kitalálni a fekvőhelyek számának változására vonatkozóan. Az egyik diák munkájában a következőket találtam:„$10 \cdot 2 = 20$; $13 \cdot 3 = 39$ összesen 7-tel több fekvőhely, $11 \cdot 2 = 22$; $12 \cdot 3 = 36$ összesen 6-tal több fekvőhely. Mindig 1-gyel csökken a szám, ha a kétágyas szobák számát 1-gyel emelem és a háromágyas szobák számát 1-gyel csökkentem", ezek után pedig egyből felírta a helyes választ minden további indoklás nélkül. Egy másik diák a következőket írta:„20 kétágyas = 40, 3 háromágyas = 9, $49+3=52$, - 3 kétágyas, +3 háromágyas, eredmény 17 kétágyas, 6 háromágyas". A rossz válaszok többsége a probléma helytelen megértéséből származott, tehát a tévedés oka a Pólya-féle modell első lépésében keresendő. A tipikusan rossz megoldások közül néhányat kiemelve még inkább bizonyítást nyer ez a tény: „52-nek a fele 26 darab kétágyas szoba található", „$52-23=29$ kétágyas, $52-29=23$ háromágyas." „$23+52=75$, $75 \cdot 2 = 150$ kétágyas szoba van". Egy tanuló a 23 és az 52 legnagyobb közös osztóját kereste prímtényezős felbontás segítségével, egy másik százalékszámítással próbálkozott a következőképpen:„alap = 23, százalékérték = 52, százalékláb = $23 \cdot \frac{52}{100} = 11{,}96$ kétágyas szoba található". Két tanuló próbálkozott algebrai módszerrel, mindketten az 1. és 4. Feladatot is algebrai módszerrel helyesen oldották meg, ennél a feladatnál viszont tévedtek, a következő megoldásokat adva: „$52 = x \div 2 + x \div 3$, $52 = x \div 5$, $x = 260$ kétágyas." és „$52 = 2 \cdot x + 3 \cdot x$, $52 = 5 \cdot x$, $x = 10{,}4$ kétágyas".

Céljaim között szerepelt megvizsgálni azt, hogy a tanulók mennyire helyesen értelmezik a százalékszámítással kapcsolatos feladatokat, ezért tűztem ki a következő feladatot.

6. Feladat. *Egy iskola tanulóinak 40 %-a lány. Hány tanulója van az iskolának, ha a fiúk száma 660?*

Értékelés. Helyes megoldások száma: 14, rossz válasz: 53, nem adott választ: 19 tanuló.

Tapasztalatok. 13 tanuló helyesen oldotta meg a feladatot arányosságokban gondolkodva, a következő (vagy ehhez hasonló) indoklással: az iskolalétszám 60 %-a 660, akkor a 10 %-a 110, tehát a 100 %-a 1100. Egy tanulónak sikerült helyes megoldást adni a százalékszámítás képleteit alkalmazva, másik két tanuló jól azonosította be a feladat adatait, illetve jól írta fel a képletet, de számítási hibát vétett. 26 tanuló a 660 –at az iskolalétszám 40 % -ának tekintette, ezek közül 13-an a továbbiakban jól alkalmazták a százalékszámítási módszereket és helyesen számoltak, de hibás eredményre jutottak az adatok téves értelmezése miatt, 8 –an jól alkalmazták a százalékszámítási módszereket, de számítási hibákat is vétettek, 5 –en pedig a százalékszámítási módszereket is rosszul alkalmazták. 9 tanuló százalékalapnak a 660 –at tekintette, ezért így számolt: $660 \cdot \frac{40}{100} = 264$ lány van az iskolában. 18 tanuló rossz választ adott indoklás nélkül, vagy indoklása minden szabályt nélkülözött. Például az egyik diák indoklása: „660 a fiúk száma, míg a lányok száma 40 ezt hozzá kell adni a 660 –hoz és megvan az eredmény 700.” Összegezve a fentieket 16 diák kivételével a tanulók már a problémamegoldás 1. lépésében (a probléma megértése) tévedtek. A legtöbb helyes megoldást azok a diákok adták, akik arányosságokban gondolkodtak és nem ragaszkodtak görcsösen a százalékszámítás képleteihez. Ez a tény mindenképpen jelzés értékű lehet a pedagógusok számára, hogy a tanítási folyamat során inkább az arányosságokban való gondolkodást kellene előtérbe helyezni.

Következtetések és javaslatok

A tanulók megoldásaiból kitűnik, hogy nagyon sokan már a probléma megértésének fázisában komoly gondokkal küszködnek, a feladat szövegének megértése is sok esetben gondot okoz. A megoldási terv készítése és végrehajtása során nem mindig ismerik fel azokat a modelleket és feladat megoldási sémákat, amelyekkel esetleg a problémával rokon feladatok esetében találkoztak. Az algebra módszereit kevés diák alkalmazza, ezek között is vannak olyanok, akik a feladatot helytelenül fordítják le az algebra nyelvére. Megfigyelhető az ellenőrzés fázisának teljes hiánya, részben ez okozta a viszonylag sok helytelen megoldást. A legfontosabb fejlesztendő területek a következők:

- a szövegértés fejlesztése;
- többféle megoldási módszer keresése;
- a problémák közös modelljének felismerése;
- az algebrai módszerek helyes alkalmazása;
- az ellenőrzés iránti igény.

Irodalomjegyzék

CLEMENTS, M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (1), 1-21.

EGODAWATTE, G. (2009). Is algebra really difficult for all students? *Acta Didactica Napocensia,* 2. (4), 101-106.

LÉNÁRD F. (1963). *A problémamegoldó gondolkodás*. Budapest: Akadémiai.

MACGREGOR, M., & STACEY, K. (1997). Students understandings of algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (3), 1-19.

PÓLYA Gy. (1967). *A problémamegoldás iskolája*. Budapest: Tankönyvkiadó