Középértékszámítás – egy megértési teszt eredményei

© Debrenti Edith
Partiumi Keresztény Egyetem, Nagyvárad
edit.debrenti@gmail.com

Ha arra keressük a választ, hogy az iskolában megszerzett matematikatudás beépül-e a hétköznapi tudásba és milyen mértékben járul hozzá a gondolkodás fejlesztéséhez, a szakirodalomban nagyon sok erre vonatkozó tanulmányt olvashatunk, ahol többek közt a transzfer kérdésével kapcsolatban kiderül, hogy nem automatikus, a megszerzett tudás nem vihető át minden további nélkül új helyzetekre (Csapó, 1998:22). Az értelmes tanulás, elsajátítás, a megértés mindenfajta tanulásnak alapvető szempontja, a matematikatanulás esetén talán még nagyobb ennek a jelentősége. A tudás más minőségét, mélyebb megértését jelzi, ha egy hallgató tudását újszerű helyzetekben is tudja használni.

A gazdalkodási és közgazdasági alap- és mesterszakok tanterveiben számos matematikai tárgy szerepel, többek közt a valószínűségszámítás és a statisztika is. A leíró statisztikának az a szerepe, hogy átfogó képet adjon az adatsorunkról néhány alapvető jellemző megadásával. Egy sokaság fő jellemzői a középértékmutatók (helyzeti mutatók, számított mutatók), és a szóródásuk, változékonyságuk. A középértékek a vizsgált sokaságot a megfigyelt ismérv alapján legtömörebben jellemzik. A középérték (átlag) fogalma alapfogalomnak számít.

A gimnáziumban tananyag a számtani közép, a súlyozott számtani közép, valamint a mértani közép. A középiskolában ez, úgy matematikából, mint fizikából kiegészül a harmonikus közép fogalmával. (A négyzetes (kvadratikus) közép és a kronológikus közép fogalma már egyetemi tananyag.) A különböző típusú átlagokkal kapcsolatos ismereteiket vizsgáltuk száz, gazdasági képzésben résztvevő hallgató esetében a Partiumi Keresztény Egyetemen. Középértékszámításokkal kapcsolatos feladatok megoldására kérve a hallgatókat, mérni szerettük volna tudásuk aktív alkalmazni tudását, önálló gondolkodásukat, problémamegoldó képességüket. A kiválasztott teszt olyan feladatokat tartalmaz, amelyeket csak mélyebb megértés esetén oldhatók meg, ezért alkalmasak a használható tudás vizsgálatára.

Az 1970-es és 1980-as években a természettudomány és matematika terén végzett nemzetközi felmérések a tantervekhez kötődtek, és azt mérték, hogy miképpen sajátítják el a tanulók a diszciplináris tudást, hogyan tudják azt a tanultakhoz hasonló környezetben alkalmazni. Az OECD PISA (Programme for International Student Assessment) három műveltségterületen (olvasás- szövegértés, matematika, természettudomány) azt méri fel, rendelkeznek-e a tanulók azzal az alkalmazható tudással, amelyre egy modern társadalomban szükség van (a tudás új helyzetekben való alkalmazásának mérése történik). A 2003-as PISA negyedik területként a komplex problémamegoldást mérte fel, ezzel egy új dimenziót nyitva meg a nemzetközi felmérésekben: a gondolkodás általános, iskolai tantárgyakhoz közvetlenül nem kötődő képességeinek mérését (Tóth, 2010:802-803).

A problémamegoldó képesség kialakulásában és az előzetes alapismeretek alapos ismeretében nagy szerepe van a középiskolai oktatásnak, nagy részben ettől is függ, hogy a hallgatóknak milyen mértékben sikerül elsajátítani a felsőoktatásban bizonyos alapozó tárgyakat, mint például gazdasági szakokon a gazdasági matematika, gazdasági statisztika, valószínűségszámítás, számvitel, stb. Akárcsak a fizikában, a közgazdaságtanban is nagyon különböző szakterületek egyidejű alkalmazására kerül sor, a matematika minden ága felmerül a közgazdasági alkalmazások során (Kánnai, Pintér & Tasnádi, 2010).

Az átlagszámítás közgazdasági alkalmazásai. Leíró statisztikai mutatók számítása

A matematika oktatása nemcsak az elsajátított ismeretek alkalmazása miatt szükséges, hanem a hallgatók logikus és racionális gondolkodásának fejlesztése miatt is elengedhetetlen minden gazdasági szakon. A gazdalkodási és közgazdasági alap- és mesterszakok tanterveiben számos matematikai tárgy szerepel, többek közt a valószínűségszámítás és a statisztika is.

A leíró statisztikának az a szerepe, hogy átfogó képet adjon az adatsorunkról néhány alapvető jellemző megadásával. Egy sokaság fő jellemzői a középértékmutatók (helyzeti mutatók, számított mutatók), és a szóródásuk, változékonyságuk. A középértékek a vizsgált sokaságot a megfigyelt ismérv alapján legtömörebben jellemzik. A középérték (átlag) alapfogalomnak számít.

1. táblázat. A különböző középértékek (statisztikai mutatók) csoportosítása

Numerikus mutatószám	*Helyzeti mutatók*	*Számított mutatók*
Középérték mutató	Módusz, Medián	Átlagok: -számtani közép (súlyozott számtani közép) -harmonikus közép, - mértani közép, -négyzetes (kvadratikus) közép - kronológikus közép
Szóródási mutató	Terjedelem, IQR	Szórás, variancia, relatív szórás

Forrás: Tóthné, 2008.

Mindegyik középérték mutató azt próbálja reprezentálni, hogy hol csoportosulnak az értékek, míg a szóródási mutatók (ingadozásmutatók) azt határozzák meg, hogy ezen elhelyezkedési pont körül mennyire szorosan vagy szétszórtan helyezkednek el a vizsgált értékek, az adatok változékonyságát fejezik ki.

Ugyanazon középértékkel rendelkező sokaság is igen különbözhet egymástól, aszerint, hogy az egyes egyedek értékei mennyire közel vagy távol helyezkednek el egymástól.

A leíró statisztika alapfogalmai: a minta elemszáma (n), maximum (a legnagyobb előforduló számérték), minimum (a legkisebb előforduló számérték), mintaterjedelem (a maximum és a minimum különbsége), számtani átlag (az értékek összege, osztva az elemszámmal), variancia, tapasztalati szórásnégyzet (az adatoknak az átlagtól való négyzetes eltéréseinek átlaga), szórás, tapasztalati szórás (a variancia négyzetgyöke), variációs koefficiens, vagy relatív hiba (a szórás százalékos aránya az átlaghoz viszonyítva), Medián (a rendezett minta közepén található adat értéke), Módusz (a tipikus, leggyakrabban előforduló érték), Kvartilisek (az alsó kvartilis a legkisebb és a medián között középen elhelyezkedő adat számértéke a rendezett mintában, a felső kvartilis hasonlóan a medián és a legnagyobb érték között van középen, a kvartilisek mutatják a ferdeséget).

A helyzeti mutatószámokat a sokaságban elfoglalt helyzetük alapján, az adatok értéknagyság szerint rendezett sorából matematikai számítás nélkül jelöljük ki, míg a számított mutatókat valamilyen képlet segítségével határozzuk meg.

Számított középértékek

A középértékek a vizsgált sokaságot a megfigyelt ismérv alapján legtömörebben jellemzik egy szám megadásával. A speciális átlagok számítása a következő szabályok alapján történik:

- ⇨ a számtani (aritmetikai) középérték számítása:

$$\bar{x}_a = \frac{\sum x_i}{n}$$

- ⇨ súlyozott számtani közép számítása (csoportosított minta esetén):

$$\bar{x}_a = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum . f_i},$$

ahol $\sum . f_i = n$ a súlyok összege.

- ⇨ harmonikus középérték számítása (fordított arányt kifejező mutatók átlagolására használjuk):

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

- ⇨ mértani középérték számítása (szorzatos összefüggést mutató adatok átlagolására használjuk):

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

- ⇨ kronológikus középérték számítása (állapot idősoros adatok átlagolására használjuk):

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1 + x_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} x_i}{n-1}$$

- ⇨ négyzetes (kvadratikus) középérték számítása (szórás kiszámításánál használjuk): $\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$.

Alkalmazások

A szórás (kvadratikus közép) számítás alapján történik a közgazdaságtanban a volatilitás számítása. A történelmi volatilitás, amely egy múltbéli periódus alatt megfigyelt ármozgásokat ír le, a folytonosan számított hozam szórása éves szinten. Azaz kiszámoljuk a napi hozamokat, majd meghatározzuk ezek szórását:

$$v = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(r_i - \bar{r})^2} * \sqrt{252} \qquad (1)$$

$$r_i = ln(S_i/S_{i-1})$$

ahol:

N – a minta elemszáma
ri – a termék logaritmizált hozama az *i.* időpontban
Si – a termék ára az i. időpontban.

A szórást természetesen ugyanúgy éves szinten kell megadni, mint a hozamokat, ezért a megkapott napi szórást éves szintre arányosítjuk. Ami a képletben (1) is látszik.

A képlet napi árak vizsgálatára vonatkozik, így az utolsó eleme a $\sqrt{252}$ az egy éven belüli tőzsdei napok számára utal. Amennyiben heti vagy havi adatokkal dolgozunk, úgy $\sqrt{52}$-vel illetve $\sqrt{12}$-vel kell szoroznunk az egyenletben.

Kutatás

A gimnáziumban tananyag a számtani közép, a súlyozott számtani közép, valamint a mértani közép. A középiskolában ez, úgy matematikából, mint fizikából kiegészül a harmonikus közép fogalmával. A négyzetes (kvadratikus) közép és a kronológikus közép fogalma már egyetemi tananyag. A különböző típusú átlagokkal kapcsolatos ismereteiket vizsgáltuk százhét, gazdasági képzésben résztvevő hallgató esetében a Partiumi Keresztény Egyetemen. Középértékszámításokkal kapcsolatos feladatok megoldására kérve a hallgatókat, mérni szerettük volna tudásuk aktív alkalmazni tudását, önálló gondolkodásukat, problémamegoldó képességüket. A kiválasztott teszt olyan feladatokat tartalmaz, amelyeket csak mélyebb megértés esetén oldhatók meg, ezért alkalmasak a használható tudás vizsgálatára.

Hipotézisek

1. A tudás más minőségét, mélyebb megértését jelzi, ha egy hallgató tudását újszerű helyzetekben tudja használni. Nem közvetlenül a kutatást megelőző időszakban (2-3 évvel ezelőtti) tanult tananyaggal kapcsolatos feladatok megoldására kérve a hallgatókat, mérni szerettük volna önálló gondolkodásukat, problémamegoldó képességüket, tudásuk aktív alkalmazni tudását. Azt feltételeztük, hogy sok mindent elfelejtettek ez alatt az idő alatt.

2. Vizsgálni szerettük volna a teszten nyújtott teljesítményeket a matematikából érettségizett, illetve a nem érettségizett hallgatók csoportjában külön- külön. Feltételeztük, hogy vannak különbségek a két csoport között, mind a matematikai tárgyi tudás, mind a tudásuk alkalmazhatósága terén, valamint mérni szerettük volna a kapcsolat szorosságát is.

Kutatási módszerünk egy matematikai megértésteszt alkalmazása volt, amelyet százhét gazdasági képzésben résztvevő (management, turisztika, bank- és pénzügyek szakos) hallgatónk (85 elsőéves és 22 mesteris) oldott meg. A kiválasztott teszt olyan feladatokat tartalmaz, amelyeket csak mélyebb megértés esetén oldhatók meg, ezért alkalmasak a használható tudás vizsgálatára.A teszt négy feladatot tartalmazott összesen, azaz négy itemet alkalmaztunk. A feladatok alkalmasak voltak a konkrét tantárgyi kontextuson túlmutató, mélyebb megértést igénylő matematikai tudás jelzés értékű mérésére.

A feladatok segítségével a matematikában használt alapvető középértékeket, mint alapfogalmakat szerettük volna vizsgálni: az alapértelmezések ismeretét, illetve ezeknek a mindennapi életben való használatát. A teszt sajátossága, hogy hasonlít az iskolai tudás felmérésében használt tesztekhez, a feladatok az alapszinten elsajátított ismeretek segítségével megoldhatók, mégis a feladatok a tudás képesség jellegű összetevőit vizsgálják, megoldásukhoz szükséges a megértés, a szövegértés, az ismeretek mélyebb kapcsolata és ezeknek a tanuló teljes ismeretrendszerébe való biztos beépülése. A feladatok kiválasztásakor fontos szempont volt, hogy ne sokféle matematikai tartalmú feladatra essen a választás, egyszerű feladatok legyenek, amelyek alapvető jelentőségűek más tantárgyak, területeken való alkalmazhatóságuk miatt is.

A felméréshez használt teszt

1. Egy autós az út első felét 80 km/h sebességgel, míg második felét 120 km/h sebességgel tette meg. Mennyi volt az átlagsebessége?

2. Anna az elmúlt hetekben nem érezte jól magát, az orvosa arra kérte, hogy két héten keresztül jegyezze fel a napi kávéfogyasztását. Két hét múlva a következő kávéfogyasztási értékeket mutatta az orvosnak: 2, 3, 4, 4, 3, 2, 5, 3, 4, 2, 3, 3, 3, 2. Állapítsuk meg, hány csésze kávét iszik Anna átlagosan?

3. Egy kerékpárkölcsönzőből első nap 45, második nap 68, harmadik nap 37, negyedik nap 11, míg ötödik nap 3 kerékpárt kölcsönöztek ki. Átlagosan hány kerékpárt kölcsönöznek ki naponta?

4. Egy üzemben a forgalom az első évben 20%-ot, a második évben pedig 5%-ot nőtt. Mennyi az évi átlagos növekedés?

Az 1. feladat (F1) esetén a harmonikus számtani átlag segítségével kellett átlagsebességet számolni a hallgatóknak. Ezt nem csak matematikából, hanem fizikából is tanulták, a mindennapi életünkben, a közvetlen környezetünkben folyamatosan jelenlévő gyakorlatias fogalomról van szó.

A 2. feladat (F2) esetén a súlyozott számtani közép számítását kellett alkalmazniuk, egyszerű szövegkörnyezetben volt megfogalmazva, hisz kávét szinte mindenki fogyaszt. Természetesen, ha nem vette észre a hallgató, hogy csoportosított mintája van, akkor egyszerűen aritmetikai átlagszámítást is alkalmazhatott.

A 3. feladat egyszerű aritmetikai átlagszámítással volt megoldható.

A 4. feladat összetettebb gondolkodást igényelt. Egy üzem forgalma növekedő tendenciát mutatott, két egymásutáni évben növekedett 20, illetve 5 százalékkal. Szorzatos összefüggést mutató adatok álltak rendelkezésre, ezért mértani középértéket kellett számítani. (Szándékosan nem kamatos kamat szövegkörnyezetben fogalmaztuk meg a feladatot.)

A tesztet 20 perc alatt oldhatták meg a hallgatók, a megoldásaikat, az egyes itemeket dichotóm (jó/ nem jó) skálán értékeltük, a teljes egészében jó válasz, illetve a lényegében jó válasz 1 pontot ért, a rossz, illetve a lényegében rossz válasz 0 pontot ért.

Kutatási eredmények

Az egyes feladatok esetén, illetve a teszten elért teljesítményeket (a jó válaszok számát) az alábbi táblázat tartalmazza. Ha figyelembe vesszük, hogy a teszt egyszerű feladatokat tartalmazott, az eredmények meglepőek.

2. táblázat. A teszten nyújtott átlagteljesítmények (pontokban)

	F1	F2	F3	F4	Összesen
BSc / I.évesek	1	79	76	0	156
MSc / Mesterisek	0	22	22	0	44
Összesen	1	101	98	0	200

Forrás: saját szerkesztés

A teszten elért teljesítményeket (a jó válaszok számát) százalékban az alábbi táblázat tartalmazza:

3. táblázat. A teszten nyújtott átlagteljesítmények (százalékban)

	F1	F2	F3	F4	Összesen
BSc/ I.évesek	1,17%	92,94%	89,41%	0%	45,88%
MSc/ Mesterisek	0%	100%	100%	0%	50%
Összesen	0,93%	94,39%	91,58%	0%	46,72%

Forrás: saját szerkesztés

A matematikai megértés teszten nyújtott átlagteljesítmények, szórások és standard hibák (az elérhető maximális pontszám 4 hallgatónként):

4. táblázat. A teszten nyújtott átlagteljesítmények, szórások és standard hibák

Hallgatók	Hallgatók száma	Átlagteljesítmény	Szórás	Standard hiba
BSc / I.évesek	85	1,83 (45,88%)	0,49	0,053
MSc/ Mesterisek	22	2 (50%)	0,42	0.089
Összesen	107	1.86 (46,72%)	0,47	0,045

Forrás: saját szerkesztés

Megvizsgálva, hogy a hallgatók milyen iskolákból és milyen szakok elvégzése után kerültek hozzánk, azt találtam, hogy a hallgatók 55,14%-a tanult a középiskolában heti 3, 4 vagy 5 órában matematikát (természettudományok, illetve matematika-informatika irányú szakosztályokban végeztek) és érettségizett is belőle, míg a hallgatók 44,85%-a humán jellegű osztályokban végzett, nem vagy alig tanult matematikát, legfennebb heti 1-2 órában és természetesen nem érettségizett ebből a tárgyból.

5. táblázat. A matematikából érettségizett hallgatók megoszlása az alapképzésben, illetve a mesterképzésben

Hallgatók	BSc	MSc	Összesen
Érettségizett matematikából	55,29%	54,54%	55,14%

Forrás: saját szerkesztés

Külön-külön megfigyelve a teszten nyújtott teljesítményeket a matematikából érettségizett, illetve a nem érettségizett hallgatók csoportjában, vannak ugyan különbségek a két csoport között, de nem akkorák, mint ahogyan elvárnánk azt figyelembe véve, hogy az egyik csoport egyáltalán nem tanult vagy alig tanult kevés matematikát, míg a másik legalább heti 3-4-5 tanórában tanulta e tárgyat.

6. táblázat. A korrelációs együttható a teszten nyújtott teljesítmény és az érettségi között

Hallgatók	BSc	MSc	Összesen
Korrelációs együttható	0,159	0,239	0,172

Forrás: saját szerkesztés

A korrelációs együttható nagyon gyenge kapcsolatot mutat, azaz nincs összefüggés a két értékelés között. A tanórákon, a tantárgyon belül, ha jól is teljesítenek, ez egy elszigetelt tudást jelent, egy új, egyszerűnek mondható helyzetben ugyanazt a tudást már nem tudják alkalmazni.

Következtetések

Általában elmondható, hogy közepes matematikai képességekkel, gyenge felhasználható matematika tudással rendelkeznek a hallgatók. (A teszt megoldható volt általános iskolai matematikai ismeretek segítségével, amelyekkel minden tanulónak rendelkeznie kellene). Az alapképzésben résztvevő elsőévesek 45,88%-ban, a mesteris hallgatók 50%-ban, tehát átlagosan 46,72%-ban teljesítették a tesztet. Egy mesteris átlagosan ugyanannyi feladatra adott jó választ, mint egy elsőéves. (Egy mester szakons hallgató azonban még több matematika, illetve statisztika órát hallgatott már, mint egy frissen végzett.)

A matematikai teszt feladatait vizsgálva, jól látszik, hogy a különböző feladatokon különbözőféleképpen teljesítettek a hallgatók, ami arra utal, hogy a matematikai megértés függ a tartalomtól. Az egyszerű aritmetikai középértéket és a súlyozott számtani közepet átlagosan 94,39%-ban, illetve 91,58%-ban ki tudták számolni. Az átlagsebesség és a szorzatos összefüggést mutató adatok esetén ellenben semmit nem tudtak kezdeni. A hallgatók átlag 55,14%-a tanult matematikát és érettségizett is belőle, míg a 44,85% humán jellegű osztályokban végzett, nem vagy alig tanult matematikát és nem érettségizett belőle.

Annak ellenére, hogy egy elég „iskolás" teszt segítségével mértük fel a hallgatókat, általános iskolai tananyagnak megfelelő szinten, csak esetleg nem a megszokott módon, elég érdekes eredményeket kaptam, és ebben nem volt nagy különbség a matematikából érettségizett, illetve a nem érettségizett hallgatók között. Feltételeztem, hogy vannak különbségek a két csoport között, mind a matematikai tárgyi tudás, mind a tudásuk alkalmazhatósága terén. Ahhoz képest, hogy az egyik csoport egyáltalán nem tanult vagy alig tanult kevés matematikát, míg a másik legalább heti 3-4-5 tanórában tanulta e tárgyat, az alkalmazás terén nincs a hallgatott óraszámmal arányos különbség a két csoport között. A műveletvégzések terén különbség mutatkozik a két csoport teljesítménye között.

Vizsgálva a műveletvégzési készségeket (az adódó számításokhoz nem használhattak maroktelefont vagy számológépet), azt kaptam, hogy akik érettségiztek matematikából, jobban tudnak műveleteket végezni (korrelációs együttható r = 0,45). A műveletvégzés és a teszten elért eredmény közötti korreláció r = 0,22.

A matematikából érettségizett 59 hallgató esetében összehasonlítottam a teszten elért eredményeiket az matematika érettségi jegyükkel, és azt kaptam, hogy a Pearson-féle korrelációs együttható nagyon kicsi. Ez gyakorlatilag nagyon gyenge kapcsolatot jelent, azaz nincs összefüggés a két értékelés között. A tanórákon, a tantárgyon belül, ha jól is teljesítenek, ez egy elszigetelt tudást jelent, egy új, egyszerűnek mondható helyzetben ugyanazt a tudást már nem tudják alkalmazni. Az érettségi jegy nem tükrözi az alkalmazható tudást.

Irodalomjegyzék

CSAPÓ Benő (szerk.) (1998). *Az iskolai tudás*. Budapest: Osiris.
DOBI János (1998). *Megtanult és megértett matematikatudás*. In Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Budapest: Osiris
KÁNNAI Z., PINTÉR M., & TASNÁDI A. (2010). Matematikaoktatás a bolognai típusú gazdasági képzésekben. *Közgazdasági Szemle*, (3), 261-277.
TÓTHNÉ LŐKÖS Klára (2008). *Leíró statisztika*. Gödöllő: GIK Kiadó.